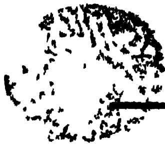
—« مثلثات ترويه »—



پیاده میرالایلرندن و اعدادیٔ حربی مکتبنك ریاضیه خواجه سی

ضیا





مکاتب اعدادیه‌لرك درس پروغرامنه مطابق بولندیغی مجلس معارف عسکریه‌نك تحت تصدیقنده‌در



هر حق مکتب فنون حربیهٔ شاهانه مطبعه‌سنه عائد اولوب اوچنجی دفعه اولمق اوزره مطبعهٔ مذکوره‌ده طبع اولنمشدر



سنه ۱۳۰۷ سنه ۱۳۰۹

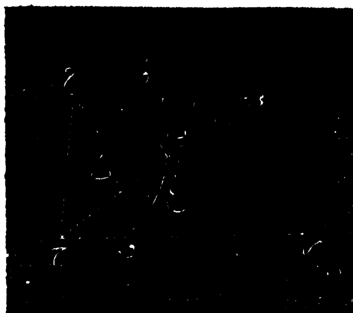
مثلثات كرويه

-• نصف قطری معلوم بر كره اوزرنده مرسوم هرقنغی مثلث كرويك اضلاع وزوايا سنك درجه اولهرق قيمتی معلوم اولنجه مثلث كروئ مذكورده معلوم اولور واضلاع وزوايانك عدد درجاتی بولمق ايچونده اضلاع وزوايای مذكوره خطوط مثلثاتيهسی ارهسنده بر طاقم مناسبات تأسيس اولنمق اقتضا ايدر •

مناسبات مذكورهدن برنجيسی بر مثلث كروينك اضلاع ثلثهسنی بر زاويهسنه ربط ايدن مناسبات اولوب مثلث كرويلرك حالنه مخصوص مناسبات سائره كندوسندن استخراج اولنهبيلديكی جهتله بوكا مناسبات اساسيه دخی تعبير اولنور •

اضلاع ثلثهسی ع ، ب ، ق وزوايای ثلثهسی ع . ب ، ق ايله كوستريلان بر مثلث كروينك ع زاويهسيله اضلاع ثلثهسی بيننده كی مناسبات مثلثاتيهيی

شكل ١



استخراج ايتمك مراد اولنسه مثلث مذكورك كرهسی مركزی شكل ١ م نقطهسی فرضيله مثلثك ع زاويهسنی محيط اولان ق ، ب ضلعلرينه ع نقطهسنده بر رخط مماس رسم وخطين مماسين مذكورينك م ب و م ه نصف قطرلرينك استقامتلرينی ، و ر نقطهلرنده قطع ايلدكلری فرض اولندقده ع م نصف قطری واحد قياسئ طوله مساوی النجه

ع د = مماس قَ و ع ر = مماس ب و ح د = قاطع قَ و ح ر = قاطع بَ
اولور بر ده د ع ر زاويه‌سی مثلث کروینك ع زاويه‌سنه مساوی
و د ح ر زاويه‌سيده مثلث مذکورك عَ ضلعيله مساحه اولنور .
مع ذلك د ع ر و د ح ر مثلث مستويلر مثلثات مستويه‌ده اثبات اولنديغی اوزره

$$\overline{دس}^{٢} = \overline{دع}^{٢} + \overline{عس}^{٢} - ٢\ دع \cdot عس \cdot جب\ د ع س$$

$$\overline{دس}^{٢} = \overline{دح}^{٢} + \overline{حس}^{٢} - ٢\ دح \cdot حس \cdot جب\ د ح س$$ اولمغين

مذکور ایکی مساواتك برنجیسی ایکنجیسندن طرح اولوب $\overline{دح}^{٢} - \overline{دع}^{٢} = ١$ و $\overline{حس}^{٢} - \overline{عس}^{٢} = \overline{دح}^{٢} - \overline{دع}^{٢}$ اولدیغیده ملاحظه اولنجه . =

٢ ـ ٢ قاطع ب . قاطع ق . جب ع ، ٢ مماس بَ . مماس قَ . جب ع
یاخود ١ ـ قاطع ب . قاطع ق . جب ع ا مماس بَ . مماس قَ ٢
جب ع - . اوله‌جغی تسلیم اولنور .
لکن مثلثات مستويه‌ده ارائه اولنديغی اوزره

قاطع بَ = $\frac{١}{جب\ بَ}$ و قاطع ه = $\frac{١}{جب\ قَ}$ و مماس بَ = $\frac{جب\ بَ}{جب\ بَ}$

و مماس ه = $\frac{جب\ ق}{جب\ ق}$ اولدیغندن مساويلر مساوات سابقه‌ده محللرینه وضع

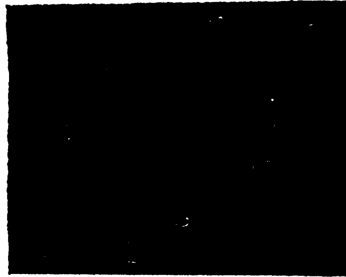
اولنور ایسه ١ ـ $\frac{جب\ ع}{جب\ بَ \cdot جب\ ق}$ = $\frac{جب\ ب \cdot جب\ قَ \cdot جب\ ع}{جب\ ب \cdot جب\ ه}$ = .

یاخود (١) .... جب ع جب ب . جب ه . + جب بَ .
جب قَ . جب ، ع اولور .

بو دستورك بر وجه سابق استخراج اولنه‌بیلمسی شکلنده اکلا شیله‌جغی وجهله بَ و قَ ضلعلرینك ربع محیطلدن اصغر اولملرینه متوقف اولدیغندن مثلثك مذکور ضلعلرینك قیمتلری نه اولور ایسه اولسون دستور مذکورك دائما صحیح اوله‌جغی بر وجه آتی اثبات اولنور .

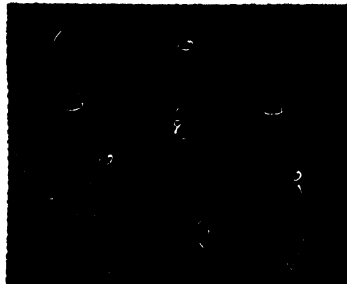
شویله که شکل ۲ ده کوریلان مثلث کروینك ضلعلرندن قَ > ۹۰° و تَ < ۹۰°
فرض اولنوب مذکور ضلعلر ب₁ نقطه‌سنده تقاطع ایدنجیه قدر تمدید اولندقده
ق ع ب₁ مثلثنده ب₁ ع ه زاویه‌سنی محیط اولان قَ₁ و تَ ضلعلری ۹۰° درجه‌دن
اصغر اولدقلرندن ب₁ ق ضلعی عَ₁ حرفیله ارائه اولنمق اوزره تجب عَ₁ = تجب
تَ . تجب قَ₁ + جب تَ . جب قَ₁ . تجب ب₁ ع₁ ق اولور .

شکل ۲



حالبوکه عَ₁ = ۱۸۰ ـ عَ و قَ₁ = ۱۸۰ ـ قَ و ب₁ ع ق = ۱۸۰ ـ ع
اولدیغندن ـ تجب عَ = ـ تجب تَ . تجب قَ ـ + جب تَ . جب قَ .
تجب ع یاخود تجب عَ = تجب تَ . تجب قَ . + جب تَ . جب قَ .
تجب ع اولور اکر تَ و قَ ضلعلرینك ایکیسیده ۹۰° دن اعظم اولورلر
ایسه شکل ۳ ده اولدیغی وجهله ضلعین مذکورین تقاطع ایدنجیه دکین

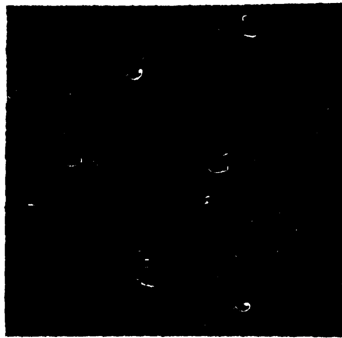
شکل ۳



تمدید اولندقده ضلعین مذکورینك متممری اولان قَ₁ و تَ₁ ضلعلری ۹۰° دن
اصغر اوله‌جقلرندن ب ع₂ ه مثلثنده
تجب عَ = تجب تَ₁ . تجب قَ₁ + جب تَ₁ . جب قَ₁ . تجب ع₁ یاخود

تجب عَ = تجب بَ . تجب دَ + جب بَ . جب ىً . تجب ع اولور
اكر مثلث مذكورده دَ = ٩٠ْ و بَ = ٩٠ْ اولور ايسه (١) رقملو
دستورينه صحيح اولوب فقط تجب عَ = تجب ع شكلنه كيرركه فى الحقيقه
مذكور ايكى ضلع طقسانر درجه اولدقده عَ ضلعى زاويه‌سنك مقدارينى
مساحه ايده‌جكى جهتله حقيقته مطابقدر .
والحاصل اكر ىَ ضلعى ٩٠ْ اولوب و بَ ضلعى ٩٠ دن كوچك ويابيوك
اولور ايسه دستورينه صحيح اولور .

شكل ٤



چونكه ع ى ضلعى اوزرنده ع . = ٩٠ْ قطع و ب ى دائرهٔ عظيمه‌سى قوس
مرور ايتديرلدكده ب ى = ٩٠ اولسه ب نقطه‌سى ع ه قوسنك قطبى
اولوب عَ = ٩٠ْ و ع = ٩٠ْ اولمق لازمكله‌جكندن (١) رقملو دستو . = .
صورتنه رجوع ايدر ايسه‌ده، ينه مرتبهٔ صحتدن ساقط اولمز .
فالديكه ب ى قوسى ٩٠ْ اولمز ايسه مبحوث عنه دستور ب ى ى مثلثنه
تطبيق اولنده
تجب عَ = تجب ب ى . تجب ى ى + جب ب ى . جب ه ى . تجب ب ى ى
صورتنه كيرر . حالبوكه ب ى ه = ٩٠ْ اولديغندن تجب ب ى ه = .
اولدقلنبشقه تجب ب ى = تجب ع و تجب ى ى = جب بَ اولمغله مساويلر
محللرينه اقامه اولنه‌رق دستورك كيرديكى اشبو تجب عَ = تجب ع . جب ب
شكلى (١) رقملى دستورك ىَ = ٩٠ْ اولديغى حالده دخى ع ب ى مثلثنه
تطبيق اولنه‌بيله‌جكنى كوسترر .
• ايشته (١) رقملى دستور عمومى اولديغندن بر مثلث كروينك اضلاع ثلثه‌سندن
هر برينه على التوالى تطبيق اولنه‌رق مثلث مذكورك اقسام سته‌سى

ارهسنده بربرندن فرقلو التی عدد مناسبات بولنه‌بیله‌جکندن اقسام ستهٔ مذکوره‌دن هر قنغی اوچی معلوم ایکن دیکر اوچی تعیین اولنه بیلور انجق اقسام ستهٔ مذکوره‌نك درت دانه‌سندن هر قنغی اوچی معلوم ایکن دردنجیسنك سرعت وسهولتله تعیین اولنه‌بیله‌سیچون مذکور درت قسمی بربرینه ممکن اوله‌بیلان مختلف طرزلرده ربط ایدر ·
دستورلر استخراجی تطبیقات عملیه‌ده لزوملی اولدیغندن وبودستورلر ایسه درت دانه اولدیغندن بوندن اشاغیده دستورات مذکوره‌نك اصول استخراجلرندن بحث اولنه‌جقدر ·

۲ — · (۱) برمثلث کروینك اضلاع ثلثه‌سیله زاویه‌سی بیننده‌کی مناسبت
بومناسبت مادهٔ سابقه‌ده مذکور (۱) رقملی دستوردن عبارت اولوب واضلاع ثلثه‌یه تطبیقندن اشاغیده‌کی اوج دستور حصوله کلور ·

(۱) تجب عَ = تجب بَ · تجب قَ + جب بَ · جب قَ · تجب ع
(۲) تجب بَ = تجب عَ · تجب قَ + جب عَ · جب قَ · تجب ب
(۳) تجب قَ = تجب عَ · تجب بَ + جب عَ · جب بَ · تجب ق

(۲) — برمثلث کروینك ایکی ضلعیله مقابل زاویه‌لری بیننده‌کی مناسبت

مثلا مثلثك عَ و بَ ضلعلریله مذکور ضلعلره مقابل ع و ب زاویه‌لری بیننده‌کی مناسبتی استخراج ایتمك مراد اولنسه ۱ و ۳ رقملی دستورلرایله اشبو جب٢ قَ + تجب٢ قَ = ۱ دستورلرندن جب قَ وتجب قَ مقدارلرینی افنا ایتمك ایجاب ایده‌جك ایسه‌ده لکن بروجه آتی دها سرعت وسهولتله استخراج اولنه بیلور ·
چونکه بر رقملی دستوردن

تجب ع = (تجب عَ − تجب بَ تجب قَ) / (جب بَ · جب قَ) وبودستوردن

جب٢ ع = ۱ − تجب٢ ع = [جب٢ بَ · جب٢ قَ − (تجب عَ − تجب بَ · تجب قَ)٢] / (جب٢ بَ · جب٢ قَ) یاخود ·

$$\text{حب}^{2}\,\text{ع} = \frac{(\text{١} - \text{حت}^{2}\,\text{ب})\,(\text{١} - \text{حت}^{2}\,\text{ق}) - (\text{حت}\,\text{ع} - \text{حت}\,\text{ب} \cdot \text{حت}\,\text{ق})^{2}}{\text{حب}^{2}\,\text{ب} \cdot \text{حب}^{2}\,\text{ق}}$$

رفع واختصار اولنەرق

$$\text{حب}^{2}\,\text{ع} = \frac{\text{١} - \text{حت}^{2}\,\text{ع} - \text{حت}^{2}\,\text{ب} - \text{حت}^{2}\,\text{ق} + \text{٢}\,\text{حت}\,\text{ع} \cdot \text{حت}\,\text{ب} \cdot \text{حت}\,\text{ق}}{\text{حب}^{2}\,\text{ب} \cdot \text{حب}^{2}\,\text{ق}}$$

وطرفين حب² ع ايله تقسيم وجذری النەرق

$$\frac{\text{حب}\,\text{ع}}{\text{حب}\,\text{ع}} = \frac{\sqrt{\text{١} - \text{حت}^{2}\,\text{ع} - \text{حت}^{2}\,\text{ب} - \text{حت}^{2}\,\text{ق} + \text{٢}\,\text{حت}\,\text{ع} \cdot \text{حت}\,\text{ب} \cdot \text{حت}\,\text{ق}}}{\text{حب}\,\text{ع} \cdot \text{حب}\,\text{ب} \cdot \text{حب}\,\text{ق}}$$

اولور .

مثلث کرویلرك اضلاع وزاویەلری طقسان درجەدن کوچك اولدیغندن جذریەنك منفی اشارتنە حاجت قالمز .

ودستورك صولطرفی ع و ب و ق ضلعلرینە نظراً متناظر اولمغلە $\frac{\text{حب}\,\text{ب}}{\text{حب}\,\text{ب}}$

ایچوندە صولطرف عینیلە ثابت قالەجغندن

$$\frac{\text{حب}\,\text{ع}}{\text{حب}\,\text{ع}} = \frac{\text{حب}\,\text{ب}}{\text{حب}\,\text{ب}} \quad \cdots\cdots \ (\text{٤})$$

$$\frac{\text{حب}\,\text{ع}}{\text{حب}\,\text{ع}} = \frac{\text{حب}\,\text{ق}}{\text{حب}\,\text{ق}} \quad \cdots\cdots \ (\text{٥})$$ اولور

یعنی برمثلث کرویدە هرقنغی ایکی ضلعك جیبلری مقابل زاویە جیبلریلە متناسب اولەجغی اکلاشیلور .

(٣) ❋ برمثلث کروینك ایکی ضلعی وبینلرندە واقع زاویە ایلە مذکور ❋
❋ ضلعلردن برینە مقابل زاویەسی بیننده کی مناسبات ❋

مثلث کروینك اقسام معلومەسی ع و ب و ق وع اولسە مناسبت مطلوبەیی بولمق ایچون (١) و (٢) و (٥) رقملی دستورلردە حت ق وحب ق مقدارلرینی افنا ایتمك لازمکلەجکندن (١) رقملو دستوردە حب ق محلنە (٢) رقملو دستوردن چیقاریلەجق قیمتی وضع اولنجە :

تجب عَ = تجب عُ . تجب٢ بَ + تجب بَ جب عَ . جب عَ . جب بَ تجب هَ
+ جب بَ جب وَ . تجب ع اولوب
تجب٢ بَ . تجب عَ برنجی طرفه نقل و ١ - تجب٢ بَ = جب بَ اولدیغیده
درپیش اولندقده
تجب عَ . جب٢ بَ = تجب ب . جب عَ جب بَ تجب ق + جب بَ جب وَ .
تجب ع اولورکه طرفین جب عَ . جب بَ ایله تقسیم اولندقده
تمام مماس عَ . جب بَ = تجب بَ . تجب و + (جب هَ تجب ع) / (جب) اولور.

حالبوکه (٥) رقملی دستور اقتضاسنجه (جب وَ) / (جب ع) = (جب و) / (جب ع) اولدیغندن
محلنه وضع اولنەرق
تمام مماس عَ . جب بَ = تجب بَ . تجب و + جب و . تمام مماس ع
اولور .

مثلث کروینك اقسام ستەسنی اشعار ایدن حروفات ممکن اولەبیلان طرزلرده برلشدیریلەرك دستور مذکوردن ایکنجی مناسبتە عائد اشاغیدەکی التی دستور حصرله کاور .

٦ .... تمام مماس عَ . جب بَ = تجب بَ . تجب ه + جب ه . تمام مماس ع
٧ .... تمام مماس بَ . جب عَ = تجب عَ . تجب و + جب ه . تمام مماس ب
٨ .... تمام مماس عَ . جب وَ = تجب وَ . تجب ب + جب ب . تمام مماس ع
٩ .... تمام مماس وَ . جب عَ = تجب عَ . تجب ب + جب ب . تمام مماس و
١٠ .... تمام مماس بَ . جب ه = تجب و . تجب ع + جب ع . تمام مماس ب
١١ .... تمام مماس هَ . جب بَ = تجب بَ . تجب ع + جب ع . تمام مماس ه

❋ (٤) - برمثلث کروینك برضلعیله زوایای ثلثەسی بیننده موجود مناسبت ❋

(١) و (٢) و (٣) رقملو دستورلرده واقع اضلاع ثلثەدن هرقنغی ایکیسنی ومثلا بَ و وَ ضلعلرینی افنا ایدرك مطلوب اولان مناسبتی مشعر دستورلرك استخراجی ممکن ایسەده مثلث کرویٔ قطبی واسطەسیلە بروجه زیر استخراجی دها سادە وقولای اولور .

شویله که مثلث کروی معلومك قطبیسی اولان مثلث کروینك زوایای ثلثه‌سی ع١ و ب١ و ق١ حرفلریله واضلاع ثلثه‌سیده عَ١ و بَ١ و قَ١ حرفلریله اشعار اولنسه مثلث مذکوردن (١) رقملو دستوره تطبیقاً

محـ عَ١ = محـ بَ١ . محـ قَ١ + حـ بَ١ . حـ قَ١ محـ ع١ اولور .

لکن عَ١ ضلعی ع زاویه‌سنك متممی اولدیغندن محـ عَ١ = — محـ ع کذلك محـ بَ١ = — محـ ب و محـ قَ١ = — محـ ق اولمغله مساویلر محللرینه اقامه اولندقده

— محـ ع = محـ ب . محـ ق — حـ ب حـ ق . محـ عَ یاخود

اشارتلر دکشدیریله‌رك

محـ ع = — محـ ب محـ ق + حـ ب حـ ق . محـ ع١ اولور .

بو عملیات مثلثك دیکر ضلعلرینه‌ده تطبیق اولنجه :

١٢.... محـ ع = — محـ ب محـ ق + حـ ب حـ ق . محـ عَ

١٣.... محـ ب = — محـ ع محـ ق + حـ ع . حـ ب . محـ بَ

١٤.... محـ ق = — محـ ب . محـ ع + حـ ب حـ ع . محـ قَ اولوب

مثلثك زوایای ثلثه‌سی معلوم ایکن برضلعنی تعیینه مخصوص دستورلر استخراج اولنمش اولور .

٣ —. تنبیه —. بوقاروده کچن دستورلرده حـ عَ و محـ عَ ... کبی تعبیرلر مقدار درجه‌لری عَ و بَ و قَ ضلعلریله مساحه اولنمغله زاویه‌لرك حـ و محـ .... کبی تناسب مثلثاتیه لرینی اشعار ایلدکلرندن حالبوکه برزاویه‌نك مقداری علی العموم قوسك نصف قطره نسبتیله اشعار اولندیغندن نصف قطری ر ایله کوستریلان برکره اوزرنده مرسوم مثلث کروینك اضلاع ثلثه‌سنك طوللری عَ و بَ و قَ ایله کوسترلدکده مذکور دستورلرده عَ و بَ و قَ مقدارلری محللرینه عَ/ر و بَ/ر و قَ/ر مقدارلری وضع اولنه‌بیلمك ایجاب ایدوب واوحالده عَ و بَ و قَ حرفلری مثلث کروی معلوم ضلعلرینك طوللرینی کوسترر .

تبدلات مشرحه واسطه‌سیله (١) رقملی دستور شو

محـ عَ/ر = محـ بَ/ر . محـ قَ/ر + حـ بَ/ر . حـ قَ/ر . محـ ع شکلنه کیرر

❋ مثلث کروئ قائم الزاویه‌لرك طریق حلی ❋

٤ — . برزاویه‌سی قائمه اولان مثلث کرویه مثلث کروئ قائم الزاویه دینوب زاویهٔ مذکوره‌یه مقابل ضلعه‌ده وتر قائمه دینلور معلوم اولدیغی وجهله بر مثلث کرویده بر ویا ایکی ویا اوچ زاویهٔ قائمه اوله‌بیله‌جکندن ایکی زاویه‌سی قائمه اولان مثلثده مذکور زاویه‌لره مقابل ضلعلر طقسانر درجه اولوب وضلع دیکرده مقابل زاویه‌نك مقدارینی کوستررر اوچ زاویه‌سی قائمه اولان مثلث کرویده ایسه اضلاع ثلثه‌دن هر بری ربع محیط قدر اولور بناء علیه مذکور ایکی نوع مثلثلرده اقسام سته‌دن اوچی معلوم ایکن دیکر اوچیده معلوم اوله‌جغندن اقسام مجهوله مفقود اولمغین بوندن اشاغیده صورت حللرندن بحث اولنه‌جق مثلث کرویلر یالکز برزاویه‌سی قائمه اولان مثلث کرویلردن مثلث کروئ قائم الزاویه‌لرك حلنه مخصوص دستورلری استخراج ایتمك ایچون (ماده ۲) ده استخراج اولنمش اولان دستورلرده زاویه‌لردن برینی ۹۰° درجه فرض ایتمك کافیدر وفی الحقیقه مذکور دستورلرده ع = ۹۰° فرض اولنمقدن آتیده‌کی دستورلر ظهور ایدر .

(۱) جب عَ = جب بَ . جب وَ

(۲) جب بَ = جب عَ جب ب ، جب وَ = جب عَ . جب و

(۳) مماس بَ = مماس عَ . جب و ، مماس وَ = مماس عَ . جب ب

(٤) مماس بَ = جب وَ . مماس ب ، مماس وَ = جب بَ . مماس و

(٥) جب ب = جب و . جب ب ، جب و = جب ب . جب وَ

(٦) جب عَ = تمام مماس ب . تمام مماس و

ایشته مثلث کروئ قائم الزاویه‌لرك حلنده استعمال اولنه‌جق دستورلر بروجه سابق ظهور ایدن ولغارتمه ایله قابل حساب اولان التی دستوردن عبارتدر

٥ . (۱) رقملی جب عَ = جب ب . جب وَ دستوروندن اکلاشلدیغی وجهله هر مثلث کروئ قائم الزاویه‌ده وترقائمه تمام جیبی زاویهٔ قائمه‌یی محیط دیکر ضلعلرك تمام جیبلری حاصل ضربنه مساوی اولور .

وجب عَ مقداریله جب بَ . جب وَ مقدارینك اشارتلری بربرینك عینی

اولەجغندن مثلثك يا اوچ ضلعنك تمام جيبلری مثبت ياخود اضلاع مذكورەدن فقط برينك تمام جيبی مثبت اولمق لازمگلور .

بناء عليه برمثلث كرویٔ قائم الزاويەده يا اوچ ضلعك هربری طقساندن كوچك ياخود يالكز بری طقساندن كوچك ديگر ايكيسی بيوك اولمق اقتضا ايدر .

٦ — . (٢) رقملی دستور زاويهٔ قائمەدن محيط ضلعلردن برينك جيبی وتر قائمە جيبنك ضلع مذكورە مقابل زاويه جيبيله مستطيلنه مساوی اولديغنی و(٣) رقملی دستور زاويهٔ قائمەیی محيط ضلعلردن برينك مماسی وتر قائمە مماسنك ضلع مذكورە مجاور زاويه تمام جيبيله مستطيلنه مساوی اولديغنی كوسترر .

٧ — . وينە (٤) رقملی دستوردن مماس ب . مماس بَ / جب قَ استخراج اولنمغله برمثلث كرویٔ قائم الزاويەده زاويهٔ مائلەلردن برينك مماسی مقابل ضلع مماسنك ضلع مجاور جيبيله تقسيمنه مساوی اولەجغی اكلاشيلور .

٨ — . مثلث كرويدە بَ و قَ ضلعلرينك جيبلری دائما مثبت اولمسندن مماس بَ = جب قَ . مماس ب دستورندن خصوصات آتيه استدلال اولنور برمثلث كرویٔ قائم الزاويەده برزاويهٔ مائله ايله مقابل ضلع دفعة ياطقسان درجەدن كوچك ويابيوك اولورلر .

٩ — . بوندن بويله صورت حللرندن بحث اولنەجق مثلث كرویٔ قائم الزاويەلر اضلاع وزاويەلرندن معلوم اولنلرە كورە آلتی صورتدە بولنورلر .

صورت اول مثلث كروينك عَ وتر قائمەسيله زاويهٔ قائمەسنی محيط ضلعلرندن بَ معلوم ايكن قَ وب و ق مقدارلرينی حساب ايتمك : بوندن اول استخراج اولنمش اولان جب عَ = جب بَ . جب ب دستورندن جب ق = جب ع / جب ب

(٢) رقملی دستوردن جب ق = جب ب / جب عَ و(٣) رقملی دستوردن جب ق = مماس بَ / مماس عَ استخراج اولنور .

اضلاع وزوایادن هر بری ۱۸۰ درجه‌دن اصغر اولدقلرندن تمام جیب واسطه‌سیله بر دانه قوس استخراج اولنه‌جغی کبی ب زاویه‌سی هرنقدر جیبی واسطه‌سیله حل اولنور ایسه‌ده (ماده ۸) مقدارجه کندوسنه مقابل ضلع جنسندن اوله‌جغندن بردن زیاده قیمتی اوله‌مامسی طبیعیدر .

صورت ثانی مثلث کروینك عَ وتر قائمه‌سیله زاویهٔ حاده‌لرندن هرقنغی بری یعنی ب زاویه‌سی معلوم ایکن بَ و قَ و ق مقدارلرینی حساب ایتمك

(ماده ۲) ده تأسیس اولنمش (۲) و (۳) و (۴) رقملی دستورلره تطبیقاً

حب بَ = حب عَ . حب ب و مماس قَ = مماس عَ . تحب ب وتمام مماس ق = تحب عَ / تمام مماس ب اولور .

بَ ضلعی جیبی واسطه‌سیله استخراج اولنور ایسه‌ده ب زاویه‌سی جنسندن بولندیغندن بردن زیاده قیمتی اوله‌مز کذلك مماس وتمام مماسی واسطه‌سیله حلی اولنان قَ ضلعیله ق زاویه‌سنك دخی یالکز بر ردرلو قیمتلری استخراج اولنور .

صورت ثالث زاویهٔ قائمه‌سنی محیط اولان بَ و قَ ضلعلری معلوم اولان مثلث کرئ قائم الزاویه‌نك عَ و ب و ق مجهوللرینی حساب ایتمك.

(۱) و (۴) رقملریله اشعار اولنمش دستورلردن

تجب عَ = تحب بَ . تحب قَ و مماس ب = مماس بَ / حب قَ و مماس ق = مماس قَ / حب بَ

اولوب مجهوللری حسابه مخصوص دستورلر استخراج اولنمش اولور .

مجهوللرك هر بری تمام حب ومماس واسطه‌سیله بولندقلرندن بردن زیاده قیمتلری اوله‌مز .

صورت رابع — زاویهٔ قائمه‌سنی محیط ضلعلرندن بَ ایله مقابل ب زاویه‌سی معلوم اولان مثلث کروئ قائم الزاویه‌نك عَ و قَ و ق مجهوللرینی حساب ایتمك

(۲) و (۴) و (۵) رقملریله اشعار اولنمش دستورلردن عملیات جبریه ایله بولنان شو دستورلر :

حب عَ = حب بَ / حب ب و حب قَ = مماس بَ / مماس ب و حب ق = تحب ب / تحب بَ

مجهوللری حسابه مخصوص دستورلردن عبارت اولورلر .

مناقشه . اولا — معلوم اولان ب زاویه‌سی حاده اولور ایسه مثلث موجود اوله‌بیلمك ایچون بَ < ب یاخود بَ = ب اولمق لازم کلوب برنجی تقدیرده مطلوبه موافق ایکی مثلث ایکنجی تقدیرده ایسه یالکز برمثلث بولنور. چونکه ب زاویه‌سی حاده اولنجه (ماده ـ ۸) حکمنجه بَ ضلعك ۹۰° دن کوچك اولمسی لازمکله‌جکی کبی بَ > ب اوله‌جق اولسه ب ایله بَ دن هر بری ۹۰° دن کوچك اولدقلرندن حب بَ > حب ب یاخود $\frac{\text{حب بَ}}{\text{حب ب}}$ > ۱ وبناء علیه حب عَ = $\frac{\text{حب بَ}}{\text{حب ب}}$ دستورندن حب عَ > ۱ اولمق لازمکله‌جکندن بَ هر حالده ب دن اصغر ویا بَ = ب اولمق لازمکلور .

$$\frac{\text{حب بَ}}{\text{حب ب}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{مماس بَ}}{\text{مماس ب}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{تحب ب}}{\text{تحب بَ}}$$

نسبتلرندن هر بری واحددن کوچك اولمق لازمکلوب حالبوکه عَ و ىَ ضلعلریله ى زاویه‌سی جیبلریله حساب اولندقلرندن مجهوللردن هر بیچون بری طقساندن کوچك اولمق اوزره بر برینك متممی ایکیشر قیمت ظهور ایتمك ایجاب ایدر .

بو حالده اکر عَ وترینك ۹۰° دن اصغر اولان قیمتی النور ایسه تحب عَ > ۰ اولوب وتحب بَ ده مثبت اولدیغندن تحب عَ = تحب عَ تحب ىَ .... دستورندن تحب ىَ > ۰ بولنور یعنی ىَ < ۹۰° النمق لزومی ظاهر اولور وى زاویه‌سی ىَ جنسندن بولنه‌جغی جهتله ده ى زاویه‌سنك دخی طقساندن کوچك قیمتنك النمسی اقتضا ایدر .
اکر عَ ضلعنه ۹۰° دن بیوك اولان قیمتی ویریلور ایسه تحب عَ < ۰ اوله‌جغندن بالطبع تحب ىَ < ۰ و ىَ > ۹۰° و ى > ۹۰° اولور .

افادات سابقه‌دن اکلاشلدیغی اوزره بَ ضلعی ب زاویهٔ حاده سندن اصغر اولنجه حساب اولنان مثلث ایکی درلو ظهور ایدوب برنده مجهوللر ۹۰° دن اصغر دیکرنده اعظم اوله‌جقلر دیمك اولور .

حالديكه بَ = ب اولور ايسه : حبَ / حب و مماس بَ / مماس ب و بحب / بحبَ

نسبتلری واحده مساوی اوله‌جقلرندن

عَ = ٩٠° و ق = ٩٠° و قَ = ٩٠° اولوب

ومثلث بردانه وقائم الزاويتين اولور .

ثانيا — معلوم اولان ب زاويه‌سی منفرجه اولدقده مثلث موجود اوله‌بيلمك ايچون بَ > ب ياخود بَ = ب اولمليدر بو ايكی تقديرك برنجيسنده ايكی مثلث وايكنجيسنده بر مثلث ظهور ايدر .

چونكه بَ > ٩٠° غير مساوات مفروضه‌دن مقابل زاويه نكده بر جنسدن اولمسی لزمنه مبنی ب > ٩٠° اوله‌جغی استدلال اولنوب و حبَ / حب نسبتك قيمت عدديه‌سی ايسه واحددن بيوك اوله‌ميه‌جغندن بَ > ب ياخود بَ = ب اولمق لزومی ظاهر اولور .

بو تقديرجه بَ > ب فرض اولنه‌رق عَ و قَ و ق مجهوللری‌چون بر برينك متممی ايكيشر قيمت بولنوركه اگر عَ > ٩٠° النور ايسه

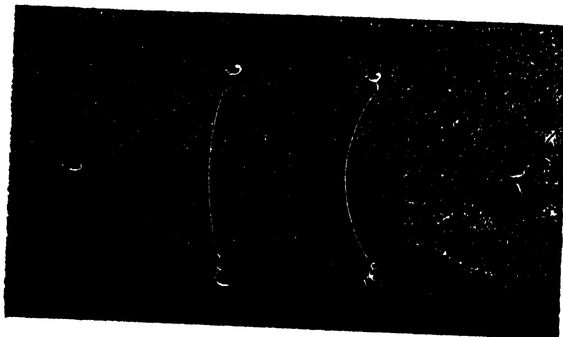
بحب عَ > ٠ وبحب ع = بحب ب ه بحب ه . بحب ب ه دستورندن بحب قَ > ٠ بولنور .

واگربالعكس ب > ٩٠° اولنور ايسه بحب ه > بولنمغله قَ > ٩٠ وق > ٩٠

بولنوب بنه مثلث ايكی درلو ظهور ايده‌جكی اكلاشيلور .

برده مثلث موجود اولدقجه اگر قائم الزاويتين دكل ايسه دائما ايكی درلو ظهور ايده‌جكی بالهندسه دها قولای ظاهره چيقارلبه بيلور .

شكل ٥



شويله‌كه (شكل ٥) ده ع ب ه مثلثی قائم الزاويتين اولميه‌رق مسئله‌يه موافق بر مثلث اولسه ب ق و ب ع ضلعلرينك متممرينه مساوی $ب_1ق$ و $ب_1ع$

ضلعلری اخذ اولندقده حصوله کلان ب ق١ ١ اولکی مثلثده کی معلوملری شامل ایکنجی مثلث اولور ٠

چونکه ب ه و ب ع ضلعلری تقاطع ایدنجیه قدر تمدید اولنجه ب ع ق و ب١ ع١ ق١ مثلثلرینك محتاج اثبات اولمیان مساواتی جهتیله

ع١ ق١ = ع ق = بَ و ق١ ع١ ب ٩٠° اولمغین

ب ع ق و ب١ ع١ ق١ مثلثلرندن هر بری مثلث مطلوبك مقادیر معلومه سنی شامل ایکی مثلث اولدقلری ثابت اولور ٠

صورت خامس — ب ضلعیله ق زاویهٔ مجاورهسی معلوم اولان مثلث کروئ قائم الزاویهنك عَ وقَ و بَ مجهوللرینی حساب ایتمك

(ماده ٤) مذکور (٣) و(٤) (٥) رقملریله اشارت اولنمش دستورلرك

مماس عَ = مماس بَ / جب ق و مماس قَ . جب بَ . مماس ق و جب بَ = جب ق . جب بَ

استخراج اولنور ٠

مجهول اولان عَ و قَ و بَ مقدارلری مماس و تمام جب واسطهسیله حساب اولندقلرندن برر درلو قیمتلری ظهور ایدر ٠

صورت سادس — ب و ق زاویهٔ مائلهلری معلوم اولان مثلث کروئ قائم الزاویهنك عَ و ب و قَ ضلعلرینی حساب ایتمك (٢) و(٥) رقملریله اشارت اولنمش دستورلردن

جب عَ = تمام مماس ب . تمام مماس ق و جب بَ = جب ب / جب ق و جب هَ = جب ق / جب ب

استخراج اولنوب ومجهوللر ایچون فقط برر قیمت ظهور ایدهجکیده کوریلور

تنبیه — ٠ مثلث کروئ قائم الزاویهلرك صورت حلنه دائر ایراد اولنمش اولان صور مختلفهده مقادیر معلومهیه متناظر خطوط مثلثاتیهدن بر ویا برقاچنك منفی اولهبیلمسی احتمالی اضلاع وزوایای معلومهنك ٩٠ دن بیوك اولمسی حالاتنده ممکن الوقوع اولدیغندن لغارتمه دستورلره تطبیق اولنهبیلمك ایچون منفی اولان مقادیر معلومهنك اشارتلری تبدیل اولنور واکر بروجه مشروح عمل اولنجه نسبت مجهولهنك اشارتی اشارت اصلیهسنك غیری ظهور ایدر ایسه زاویه ویاضلع مجهولك مسئلهیه توافق ایدهجك قیمتی دستور ایله بولنان مقدارك متممی اولان مقدار اولدیغی واشارت اصلیهسنك عینی چیقار ایسه بولنان قیمت مسئلهیه موافق قیمت اولدیغی اکلاشیلور ٠

افادهٔ سابقه برمثال ایله دها لایقلی اکلاشلق ایچون مثلث کرویٔ قائم الزاویه‌ده زاویهٔ قائمه‌یی محیط اولان بَ وِ یَ ضلع معلوملرندن بری ۹۰ دن اعظم فرض اولنسه‌لر حب بَ و حب یَ نسبتلرینك اشارتلری منفی اوله‌جغندن لغارتمه‌لری تحصیل اولنه‌بیلمك ایچون مذکور اشارتلر تبدیل اولنور .

حالبوکه حب عَ مثبت قالمغله عَ وتر قائمه‌سیچون تحصیل اولنان طقسان درجه‌دن اصغر مقدار مسئله‌یه موافق قیمت اولور .

ب زاویه‌سنك قیمتی ایسه شو

$$\text{مماس ب} = \frac{\text{مماس بَ}}{\text{حب یَ}}$$

دستوریله استخراج اولنوب ودستور مذکورده مماس بَ تعبیرینك اشارتی تبدیل اولنجه مماس ب تعبیرینك دخی اشارتی دکشدیرلمش اوله جغندن بولنان مقدارك متممی مسئله‌یه توافق ایدر .

✵ مثلث کرویٔ مائل الزوایانك طریق حلی ✵

١٠ —. صورت اولی —. برمثلث کرویٔ مائل الزوایانك عَ و بَ و یَ ضلعلری معلوم ایکن ع و ب و ی زاویه‌لرینی حساب ایتمك

زوایای مذکوره دن بالفرض ع زاویه‌سی حساب اولنه‌جق اولسه زاویهٔ مذکوره‌یی اصلاع ثلثه‌یه ربط ایدن شو

$$\text{حب عَ} = \text{حب بَ} \cdot \text{حب یَ} + \text{جب بَ} \cdot \text{جب یَ} \cdot \text{حب ع}$$

دستورندن حب ع قولایلقله حل اولنوب و

$$\text{حب ع} = \frac{\text{حب عَ} - \text{حب بَ} \cdot \text{حب یَ}}{\text{جب بَ} \cdot \text{جب یَ}} \quad \text{اولور .}$$

لکن جب $\frac{\text{ع}}{٢}$ و حب $\frac{\text{ع}}{٢}$ ومماس $\frac{\text{ع}}{٢}$ تعبیرلرینك قیمتلری تعیین اولنه‌رق لغارتمه ایله حللری دها قولای دستورلر بروجه آتی بولنور .

مثلثات مستویه‌ده کورلدیکی وجهله :

جب ع/۲ = √((۱ ـ تجب ع) / ۲) اولدیغندن تجب ع تعبیرینك یرینه اولكی دستوردن بولنان مساویسی وضع اولندقده

جب ع/۲ = √((۱ ـ (تجب عَ ـ تجب بَ . تجب قَ) / (جب بَ . جب قَ)) / ۲)

= √((تجب بَ . تجب قَ + جب بَ . جب قَ ـ تجب عَ) / (۲ جب بَ . جب قَ))

= √((تجب (بَ ـ قَ) ـ تجب عَ) / (۲ جب بَ . جب قَ))

ویاخود مثلثات مستویه‌ده كورلدیكی وجهله

تجب (بَ ـ قَ) ـ تجب عَ = ۲ جب (عَ + بَ ـ قَ)/۲ جب (عَ + قَ ـ بَ)/۲

اولدیغندن جب ع/۲ = √((جب (عَ + بَ ـ قَ)/۲ . جب (عَ + قَ ـ بَ)/۲) / (جب بَ . جب قَ))

اولور.

برده عَ + بَ + قَ = ۲ م فرض اولنور ایسه

(عَ + قَ ـ بَ)/۲ = م ـ بَ و (عَ + بَ ـ قَ)/۲ = م ـ قَ اوله‌جغندن

(۱) . . . جب ع/۲ = √(جب (م ـ بَ) جب (م ـ قَ) / (جب بَ . جب قَ)) اولور

وبروجه سابق عمل اولنه‌رق

(۲) . . . تجب ع/۲ = √(جب م . جب (م ـ عَ) / (جب بَ . جب قَ)) بولنه‌جغندن

(۱) رقملی دستور (۲) رقملی دستور ایله تقسیم اولنه‌رق

(۳) . . . مماس ع/۲ = √(جب (م ـ بَ) جب (م ـ قَ) / (جب م . جب (م ـ عَ))) بولنور

دستورات ثلثهٔ سابقه مثلثات مستویه‌ده اضلاع ثلثه‌سی معلوم اولان مثلث مستوینك زاویه‌لرینی حساب ایچون استخراج اولنمش اولان دستورلره مشابه اولوب وبر مثلث کروینك زاویه‌لرندن هر قنغی بری حساب اولنه‌جق اولدیغی حالده مثلثات مستویه‌ده مذکور اولدیغی اوزره بر زاویه‌نك جیب ویاتمام جیبیله حلی خطادن سالم اوله‌میه‌جغندن (۳) رقملی دستور قوللانلملیدر .

مناقشه —. ع زاویه‌سنك حسابی ایچون بولنمش اولان اوچ دستوردن اوچنجیسی اولان

$$\text{مماس}\ \frac{ع}{۲} = \sqrt{\frac{\text{حب}(م-\acute{ب})\,\text{حب}(م-\acute{ق})}{\text{حب}\ م\cdot\text{حب}(م-\acute{ع})}}\quad \text{دستوری}$$

تدقیق ایدیله‌جك اولسه دستور مذکورده عَ و بَ و قَ ضلعلری مثبت ونصف محیطدن اصغر اولدیغندن مماس $\frac{ع}{۲}$ مقداری ایچون حصوله کله‌جك قیمتك مطلوبه موافق اولمسی مجذورك مثبت ومحدود ومعین اولمسنه متوقفدر یعنی مجذورك جذرلرینك اشارتلری بربرینك عینی اولوب و $\frac{ع}{۲}$ زاویه سنك مقداری صفر ایله ۹۰° اره سنده بولندیغندن مذکور حدلردن هیچ صفر اوله‌مامق ایجاب ایده‌جکندن بشقه حدین مذکورینك ایکیسی بردن منفی دخی اوله‌مز چونکه مذکور حدلرك منفی اولمسی صورتده بولنان مضروبلردن برینك ومثلا حب (م ـ بَ) مضروبنك منفی اولمسی اقتضا ایده‌جکی کبی مخرجده بولنان مضروبلردنده فقط برینك منفی اولمسنی ایجاب ایدوب بناء علیه

$$\text{حب}(م-\acute{ب}) < ۰ \ \text{وحب}\ م < ۰ \quad \text{یاخود}$$

$$\text{حب}(م-\acute{ب})\ \text{وحب}(م-\acute{ع}) < ۰$$

اولمسی لازمکلور حالبوکه مذکور ایکی فرضك هیچ بری شایان قبول اوله‌میه‌جغی افادهٔ آتیه ایله ثابت اولور . شویله‌که معلوم اولدیغی اوزره

$$\text{حب}(م-\acute{ب}) + \text{حب}\ م = ۲\ \text{حب}\ \frac{\acute{ع}+\acute{ق}}{۲}\ \text{حب}\ \frac{ب}{۲} \quad \text{اولوب و}$$

$$\frac{\acute{ع}+\acute{ق}}{۲} < ۱۸۰° \quad \text{اولدیغندن}$$

جب $\frac{\text{عَ} + \text{قَ}}{۲}$ > ۰ وبنه $\frac{\text{بَ}}{۲}$ < ۹۰° اولدیغندن جب $\frac{\text{بَ}}{۲}$ > ۰ اولمغین

جب (م ـ بَ) + جب م > ۰ اولوب

جب (م ـ بَ) > ۰ وجب م > ۰

غیر مساواتلری دفعةً موجود وصحیح اولەمزلر .

کذلك . جب (م ـ بَ) + جب (م ـ عَ) = ۲ جب $\frac{\text{قَ}}{۲}$ جب $\frac{\text{عَ} - \text{بَ}}{۲}$

مساواتنده برنجی مضروب اولان جب $\frac{\text{قَ}}{۲}$ مضروبنك مثبت اولدیغی اشکارو

عَ < ۱۸۰° و بَ < ۱۸۰° اولدیغندن

$\frac{\text{عَ} - \text{بَ}}{۲}$ < ۹۰° وجب $\frac{\text{عَ} - \text{بَ}}{۲}$ > ۰ اولمغله

جب (م ـ بَ) + جب (م ـ عَ) مجموعی مثبت اولمق لازمکلوب بونك ایچون دفعةً

جب (م ـ بَ) < ۰ وجب (م ـ عَ) < ۰ اولەمیەرق

$\frac{\text{جب (م ـ بَ) جب (م ـ عَ)}}{\text{جب م . جب (م ـ قَ)}}$

کسرینك حدلری مثبت اولمق لازمکلەجکی ثابت اولور .

وبنه $\frac{\text{جب (م ـ بَ) . جب (م ـ عَ)}}{\text{جب م . جب (م ـ عَ)}}$ افادەسنده واقع مضروبلرك

ایکیسی بردن منفی اولەمیەجقلری بوندن اول اثبات وارائه اولنمش اولدیغندن

جب (م ـ بَ) . جب (م ـ عَ) > ۰ دن جب (م ـ بَ) > ۰ وجب (م ـ عَ) > ۰

غیرمساواتلری استخراج اولنەجغی کبی شو جب م . جب (م ـ عَ) > ۰

غیر مساواتندن دخی

جب م > ۰ و جب (م ـ عَ) > ۰

غیر مساواتلری استخراج اولنوب بناء علیه $\frac{\text{جب (م ـ بَ) . جب (م ـ قَ)}}{\text{جب م . جب (م ـ عَ)}}$

غیر مساواتندن

حب(م ـ بَ) > ٠ وحب (م ـ نَ) > ٠ وحب م > ٠ وحب (م ـ عَ) > ٠
اولمق لازمكلەجكى اكلاشيلور .
مع هذا ٢٧٠° درجەدن اصغر اولمسى طبيعى اولان م نصف مجموع اضلاع
حب م > ٠ اولمسى شرطنه نظراً ١٨٠° دن دخى اصغر اولمق لازمكلمكله

م < ١٨٠ و ٢ م < ٣٦٠ اولوب

بو ايسه مثلثك مجموع اضلاعنك محيط دائرەدن اصغر اولەجغنى كوسترمكله
تدقيقات سابقە نتايجنك حقيقتە مقارنتنه دليل اولور .
برده دستورده داخل م ـ بَ و م ـ ىَ و م ـ عَ قوسلرنده هر برينك اشارتى
مثبتدر چونكه اكر مذكور قوسلردن برينك ومثلا م ـ عَ قوسنك اشارتى
منفى اولەجق اولسه حب (م ـ عَ) > ٠ اولمق لازم كلديكندن (م ـ عَ)
قوسى قيمت مطلقەسيله ١٨٠ درجەدن اعظم اولمق وعَ ضلعيده ينه ١٨٠° دن
اعظم اولمق لازمكلوركه بو خصوص مثلث كرويلرده اضلاعدن هر برينك
نصف محيطدن اصغر اولمسى فرضنك خلافى اولديغى جهتله صحيح اولەمیەجغى
محتاج تكرار اولمامغله

(م ـ عَ) > ٠ و (م ـ بَ) > ٠ و (م ـ ىَ) > ٠
و عَ < بَ + ىَ و ىَ < بَ + عَ و بَ < ىَ + عَ

اولمق ايجاب ايدوب ومثلثك موجود اولمسنه مقتضى شرائط كافيه آتيدەكى
ايكى شرط ايله اولەجغى اكلاشيلور .
(١) اضلاع ثلثۀ معلومه مجموعى بردائرۀ عظيمه محيطندن اصغر اولمق
(٢) اضلاع معلومەدن هر برى ديكر ايكيسى مجموعندن اصغر بولنمق
صورت ثانيه — عَ و بَ ضلعلريله برنجى ضلعه مقابل ع زاويەسى معلوم
اولان برمثلث كروىٔ الزاوايانك ب وق و ىَ مجهوللرينى حساب ايتمك
مجهوللردن ب زاويەسى حب ب = $\frac{\text{حب بَ حب ع}}{\text{حب عَ}}$
دستورى ايله حساب اولنور .

ی زاویه‌سنی حساب ایتمك ایچون دخی (ماده ۳) مذکور اولان شو دستور
عام مماس عَ . جب بَ = تجب بَ تجب یَ + جب ی عام مماس ع اخذ اولندقده
دستور مذکوردن جب ی + (تجب بَ / عام مماس ع) تجب ی = (عام مماس عَ . جب بَ) / (عام مماس ع)
بولنور .

امدی مماس هـ = (تجب بَ) / (عام مماس ع) فرض اولنوبده افادهٔ سابقه‌ده (تجب بَ) / (عام مماس ع)

محلنه (جب هـ) / (تجب هـ) وضع اولنور ایسه

جب ی + (جب هـ) / (تجب هـ) . تجب ی = (عام مماس عَ . جب بَ) / (عام مماس ع) یاخود

جب ی . تجب هـ + تجب ی . جب هـ = (عام مماس عَ . جب بَ تجب هـ) / (عام مماس ع)

اولورکه بوده جب (ی + هـ) (عام مماس عَ . جب بَ تجب هـ) / (عام مماس ع) دیمك

اولدیغندن بو نهایت دستوردن ی زاویه‌سیله هـ زاویهٔ متوسطه‌سی مجموعی بولنوب وزاویهٔ متوسطه طرح اولنه‌رق زاویهٔ مجهوله بولنور .

تجب عَ = تجب بَ . تجب ی + جب بَ . جب یَ . تجب ع دستوری
الندرق تجب عَ = تجب بَ (تجب یَ + مماس بَ . جب یَ . تجب ع)

صورتنه وضع بعده مماس بَ . تجب ع = عام مماس هـ = (تجب هـ) / (جب هـ) فرضیله

مساویسی یوقاروکی افاده‌ده محلنه اقامه اولنجه :

تجب عَ = تجب بَ (تجب یَ + (تجب هـ) / (جب هـ) . جب یَ) = (تجب بَ جب (یَ + هـ)) / (جب هـ)

یاخود جب (یَ + هـ) = (تجب عَ . جب هـ) / (تجب بَ) حصوله كلوب مذكور

دستوردن یَ ضلعیله هـ زاویهٔ متوسطه‌سی مجموعی بولنوب وزاویهٔ متوسط طرح اولنه‌رق یَ ضلعی بولنور .

صورت ثالث — بر مثلث كرویٔ مائل الزوایانك عَ و بَ ضلعلریله بینلرنده‌كی

ى زاويه‌سى معلوم ايكن ع و ب و ىَ مجهوللرينى حساب ايتمك

ع زاويه‌سنى بولمق ايچون معلوم اولان

تمام مماس عَ . حب بَ = محب بَ . محب ه + حب ى . تمام مماس ع

دستوريندن تمام مماس ع = (تمام مماس عَ . حب بَ ـ محب بَ . محب ى) / (حب ه) =

(تمام مماس عَ) / (حب ى) { حب بَ ـ (محب ه . محب بَ) / (تمام مماس عَ) } اولور .

امدى مماس ه = (محب ه) / (تمام مماس عَ) = (حب ه) / (محب ه) اوله‌جق اولان برزاويهٔ متوسطه

ه ايله كوستريلوبده (محب ه) / (تمام مماس عَ) كسرينك بوفرضه كوره اولان قيمتى

افادهٔ سابقه‌ده محلنه وضع اولنسه

تمام مماس ع = (تمام مماس عَ) / (حب ى) . (حب بَ محب ه ـ حب ه . محب ب) / (محب ه)

= (تمام مماس عَ . حب (بَ ـ ه)) / (محب ه . حب ى) اولور .

و ه زاويهٔ متوسطه‌سى مماس ه = (محب ى) / (تمام مماس عَ) مساواتيله تعيين

اولنديغندن ىَ ضلعنى حساب ايچون

محب ىَ = محب عَ . محب بَ + حب عَ . حب بَ . محب ى دستورى النوركه

مذكور دستوردن

محب ىَ = محب عَ (محب بَ + مماس عَ . حب بَ . محب ى) اولوب

مماس عَ . محب ى = تمام مماس ه = (محب ه) / (حب ه) فرض ومساويسى محلنه وضع

اولندقده

محب ىَ = محب عَ (محب بَ + (محب ه) / (حب ه) . حب بَ) = (محب عَ . حب (بَ + ه)) / (حب ه)

صورت رابعه — بر مثلث كروى مائل الزواياننك ع و ب زاويه‌لريله مذكور زاويه‌لره مجاور ىَ ضلعى معلوم ايكن ى و عَ و بَ مجهوللرينى حساب ايتمك:

َع ضلعنی حساب ایچون (ماده ۳) ده مذکور آتیده‌کی دستور استعمال اولنور .

تمام مماس َع . حب َه = محب َق . محب ب + حب َب . تمام مماس ع

مذکور دستوردن

$$\text{تمام مماس َع} = \frac{\text{محب َه}}{\text{َق حب}} \left\{ \text{محب ب} + \frac{\text{حب ب . تمام مماس ع}}{\text{محب َه}} \right\}$$ اولوب

$$\frac{\text{تمام مماس ع}}{\text{محب َق}} = \text{تمام مماس ه} = \frac{\text{محب ه}}{\text{حب ه}}$$

فرض اولنه‌رق افادهٔ سابقه‌ده مساویسی محلنه اقامه اولندقده

$$\text{تمام مماس َع} = \frac{\text{محب َق}}{\text{حب َق}} \left\{ \text{محب ب} + \frac{\text{حب ب . محب ه}}{\text{حب ه}} \right\}$$

$$= \frac{\text{تمام مماس َق . حب (ب + ه)}}{\text{حب ه}}$$ اولور .

وعین اصول اوزره عمل اولنه‌رق

$$\text{تمام مماس َب} = \frac{\text{تمام مماس َق . حب (ع + ه)}}{\text{حب ه}}$$ بولنور .

ق زاویه‌سنك حسابی بروجه آتی اولور .

محب َق = − محب ب . محب ع + حب ب . حب ع . محب َه دستورندن

محب ق = محب ع (− محب ب + مماس ع . حب ب . محب َق) اولورکه

$$\text{مماس ع . محب َق} = \text{تمام مماس ه} = \frac{\text{محب ه}}{\text{حب ه}}$$

فرضیله مساویسی محلنه وضع اولندقده

$$\text{محب ق} = \text{محب ع} \left(- \text{محب ب} + \frac{\text{حب ب . محب ه}}{\text{حب ع}} \right) = \frac{\text{محب ع حب (ب − ه)}}{\text{حب ه}}$$

اولور .

صورت خامسه — برمثلث کروی مائل الزوایانك ع و ب زاویه‌لریله مذکور زاویه‌لردن برنجی‌یه مقابل ع ضلعی معلوم ایکن َب و َق و ق مجهوللرینی استخراج ایتمك :

مثلث کروی مائل الزوایانك معلوم اولان خاصه‌سی موجبنجه

$$\text{جب بَ} = \frac{\text{جب عَ . جب ب}}{\text{جب ع}} \quad \text{اولوب}$$

بَ ضلعنى حسابه مخصوص دستور بولنمش اولور و ىَ ضلعنى حساب ايتمك ايچون دخى شو

تمام مماس عَ . جب ىَ = تجب ىَ . تجب ب + جب ب . تمام مماس ع دستورندن

تمام مماس عَ . جب ىَ ـ تجب ىَ . تجب ب = جب ب . تمام مماس ع ياخود

$$\text{جب ىَ} - \frac{\text{تجب ىَ . تجب ب}}{\text{تمام مماس ع}} = \frac{\text{جب ب . تمام مماس ع}}{\text{تمام مماس عَ}} \quad \text{اولمغله}$$

$$\frac{\text{تجب ب}}{\text{تمام مماس عَ}} = \text{مماس هـ} = \frac{\text{جب هـ}}{\text{تجب هـ}}$$ فرضيله مساويسى يوقاروده‌كى دستورده محلنه وضع اولندقده

$$\text{جب ىَ} - \frac{\text{جب هـ}}{\text{تجب هـ}} \cdot \text{تجب ىَ} = \frac{\text{جب ب . تمام مماس ع}}{\text{تمام مماس عَ}} \quad \text{ياخود}$$

$$\text{جب}(\text{ىَ} - \text{هـ}) = \frac{\text{جب ب . تمام مماس ع . تجب هـ}}{\text{تمام مماس ع}}$$ اولوب مطلوب ثابت اولور

وينه ى زاويه‌سنك حسابنه گلنجه

تجب ع = ـ تجب ب . تجب ى + جب ب . جب ى . تجب عَ دستورندن

$$\text{جب ى} - \frac{\text{تمام مماس ب . تجب ى}}{\text{تجب عَ}} = \frac{\text{تجب ع}}{\text{جب ب . تجب عَ}} \quad \text{اولمغله}$$

$$\frac{\text{تمام مماس ب}}{\text{تجب ع}} = \text{مماس هـ} = \frac{\text{جب هـ}}{\text{تجب هـ}}$$ فرض ودستورده محلنه وضع اولندقده

$$\text{جب}(\text{ى} - \text{هـ}) = \frac{\text{تجب ع . تجب هـ}}{\text{جب ب . تجب عَ}} \quad \text{اولور .}$$

صورت سادسه — بر مثلث كروىٔ مائل الزوايانك ع و ب و ى زاويه‌لرى معلوم ايكن عَ و بَ و ىَ ضلعلرينى حساب ايتمك .

تجب ع = ـ تجب ب . تجب ى + جب ب . جب ى . تجب عَ دستورندن

$$\text{تجب عَ} = \frac{\text{تجب ع + تجب ب . تجب ى}}{\text{جب ب . جب ى}}$$

استخراج اولنور ایسەدە لغارتمه ایله قولایجه حساب اولنور دستورلری بولمق ایچون $\text{حب}\,\frac{ع}{٢}$ و $\text{حب}\,\frac{ب}{٢}$ و $\text{حب}\,\frac{و}{٢}$ تعبیرلرینك قیمتلری اراشدیرلسه

$$\text{حب}\,\frac{ع}{٢} = \sqrt{\frac{١ - \text{جب}\,ع}{٢}} = \sqrt{\frac{\text{حب}\,ب \cdot \text{حب}\,و - \text{جب}\,و - \text{جب}\,ع}{٢\,\text{حب}\,ب \cdot \text{حب}\,و}}$$

$$\text{حب}\,\frac{ع}{٢} = \sqrt{\frac{- \text{جب}\,(ب + و) - \text{جب}\,ع}{٢\,\text{حب}\,ب \cdot \text{حب}\,و}}$$ اولوب

حالبوکه $\text{جب}\,(و + ب) + \text{جب}\,ع = ٢\,\text{جب}\,\frac{ع + ب + و}{٢}\ \text{جب}\,\frac{ب + ه - ع}{٢}$ اولدیغندن

$$\text{حب}\,\frac{ع}{٢} = \sqrt{\frac{- \text{جب}\,\frac{ع + ب + و}{٢}\ \text{جب}\,\frac{ب + و - ع}{٢}}{\text{حب}\,ب \cdot \text{حب}\,و}}$$ اولور .

فن هندسەدە کورلدیکی اوزره برمثلث کروینك زاویەلری مجموعی ایکی قائمەدن اعظم اولدیغندن ع و ب وو زاویەلری مجموعنك ایکی قائمەدن زیادەلکی ٢ك ایله ارائه اولنسه

$\frac{ع + ب + و}{٢} = ك + ٩٠$ و $\frac{ب + و - ع}{٢} = ك + ٩٠ - ع$ اولدیغندن

$- \text{جب}\,\frac{ع + ب + و}{٢} = \text{حب}\,ك$ و $\text{جب}\,\frac{ب + و - ع}{٢} = \text{حب}\,(ع - ك)$

اولمغین دستور سابق آتیەدەکی شکله کیرر

$$\text{حب}\,\frac{ع}{٢} = \sqrt{\frac{\text{حب}\,ك \cdot \text{حب}\,(ع - ك)}{\text{حب}\,ب \cdot \text{حب}\,و}}$$

بروجه مشروح اجرای عمل اولنەرق

$$\text{جب}\,\frac{ع}{٢} = \sqrt{\frac{\text{حب}\,(ب - ك) \cdot \text{حب}\,(و - ك)}{\text{حب}\,ب \cdot \text{حب}\,و}}$$ بولنەجغندن

مذکور ایکی دستور بربریله تقسیم اولنەرق

مماس $\frac{\text{عَ}}{۲}$ = $\sqrt{\frac{\text{جب ك . جب (ع - ك)}}{\text{جب (ب - ك) . جب (ق - ك)}}}$ بولنور .

بو وجهله بولنان دستورلرده حرفلر دکشدریله‌رك بَ و قَ ضلعلرینك حسابنه مخصوص دستورلرنده استخراج اولنه‌جغی محتاج تعریف دکلدر .

۱۱ — مثلث کروی مائل الزوایانك متممـلری النه‌رق التی درلو اولان حللرینك صکره‌کی اوچ صورتی اولکی اوچ صورته یعنی التنجی ی برنجی یه بشنجی یی ایکنجی یه ودردنجی یی اوچنجی‌یه ارجاع ممکن اوله‌جغی کبی (دولامبر) و (نپر) دستورلری واسطه‌سیله‌ده حللری تسهیل اولیور .

دولامبر دستورلری

۱۲ —. ماده سابقه‌ده مذکور اولدیغی اوزره بر مثلث کروی مائل الزاویه‌ده ع + بَ + قَ = ۲ م

جب ½ ع = $\sqrt{\frac{\text{جب (م - بَ) . جب (م - ق)}}{\text{جب بَ . جب ه}}}$ و تجب ½ ع = $\sqrt{\frac{\text{جب م . جب (م - عَ)}}{\text{جب بَ . جب هَ}}}$

جب ½ ب = $\sqrt{\frac{\text{جب (م - هَ) . جب (م - عَ)}}{\text{جب عَ . جب ق}}}$ و تجب ½ ب = $\sqrt{\frac{\text{جب م . جب (م - بَ)}}{\text{جب عَ . جب ق}}}$

جب ½ ه = $\sqrt{\frac{\text{جب (م - عَ) . جب (م -)}}{\text{جب عَ . جب بَ}}}$ و تجب ½ ق = $\sqrt{\frac{\text{جب م . جب (م - قَ)}}{\text{جب عَ . جب بَ}}}$

دستورات آتیه‌ده

جب ½ (ع ± ب) = جب ½ ع . تجب ½ ب ± جب ½ ب . تجب ½ ع

تجب ½ (ع ± ب) = تجب ½ ع . تجب ½ ب ∓ جب ½ ع . جب ½ ب

حب ½ ع وحب ½ ب و بحب ½ ع وبحب ½ ب محللرینه یوقاروده کی مساویلری وضع اولنیجه

حب ½ (ع ± ب) = [حب (م − بَ) ± حب (م − عَ)] / حب ق

√[حب م حب (م − قَ) / حب ع . حب بَ] = [حب (م − بَ) ± حب (م − عَ)] / حب ق   بحب ½ ق

كذلك بحب ½ (ع ± ب) =

[حب م + حب (م − ق)] / حب قَ = √[حب (م − بَ) حب (م − عَ) / حب عَ . حب ب] =

[حب م . حب (م − قَ)] / حب قَ . حب ½ ق   اولور .

بوندنبشقه حب (م − بَ) + حب (م − ع) = ٢ حب ½ ه . بحب ½ (ع − بَ)

حب (م − عَ) − حب (م − بَ)   ٢ بحب ½ ق حب ½ (عَ − بَ)

حب م + حب (م − قَ) = ٢ حب ½ (عَ + ب) . بحب ½ قَ

حب م − حب (م − ق)   ٢ بحب ½ (عَ + ب) حب ½ قَ

حب قَ = ٢ حب ½ ق . بحب ½ ق   اولديغندن

مساويلر محللرينه وضع واختصار اولنەرق

حب ½ (ع + ب) / حب ½ قَ = بحب ½ (عَ − ب) / بحب ½ ق

حب ½ (ع − ب) / بحب ½ قَ = حب ½ (ع − ب) / حب ½ ه

بحب ½ (ع + ب) / بحب ½ قَ = بحب ½ (ع + ب) / بحب ق   ....(ل)

بحب ½ (ع − ب) / حب ½ قَ = حب ½ (ع + ب) / حب ½ ق

دستورلری بولنمش بولنورکه بونلره مستخرجینك نامنه نسبتله (دولامبر) دستورلری تعبیر اولنور .

نپر دستورلرى

۱۳ —۰ (ماده ۱۲) ده (ل) ايله اشارت اولنمش اولان دستورلردن ايكنجى دردنجى و برنجى اوچنجى وينه تكرار ايكنجى برنجى وردنجى اوچنجى ايله تقسيم اولنەرق دستورات آتيهٔ استخراج اولنور ۰

$$\text{مماس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{ب}) = \text{تمام مماس}\,\frac{\text{و}}{2}\cdot\frac{\text{حب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{بَ})}{\text{حب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عَ}+\text{بَ})}\quad\cdots\cdots\ (1)$$

$$\text{مماس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{ب}) = \text{تمام مماس}\,\frac{\text{و}}{2}\cdot\frac{\text{محب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عَ}+\text{بَ})}{\text{محب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عَ}+\text{ب})}\quad\cdots\cdots\ (2)$$

$$\text{مماس} + (\text{عَ}-\text{بَ}) = \text{تمام مماس}\,\frac{\text{وَ}}{2}\cdot\frac{\text{حب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{ب})}{\text{حب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{ب})}\quad\cdots\cdots\ (3)$$

$$\text{مماس}\,\tfrac{1}{2}(\text{عَ}+\text{بَ}) = \text{مماس}\,\frac{\text{وَ}}{2}\cdot\frac{\text{محب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{ب})}{\text{محب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{ب})}\quad\cdots\cdots\ (4)$$

ايشته بودرت دستور (نپر) دستورلرندن عبارتدرلر ۰

نپر دستورلرينك مثلث كرويلرك حللرينه تطبيقى

۱٤ —۰ نپر دستورلريله مثلث كرويلر اقدمجه افاده اولنديغى وجهله قولايلقله يعنى زاويهٔ متوسطه استعمالنه حاجت قالمقسزين بروجه آتى حل وحساب اولنور ۰

صورت ثانيه — عَ و بَ ضلعلريله برنجى ضلعه مقابل ع زاويەسى معلوم اولان برمثلث كروينك ب و و وَ مجهوللرينى حساب ايتمك لازم كلسه اولا معلوم شو

$$\frac{\text{حب ب}}{\text{حب ع}} = \frac{\text{حب بَ}}{\text{حب عَ}}$$

نسبتندن

حب ب = حب ع . حب بَ / حب عَ .... (۱) اولور .

بعده (ماده ۱۳) ده مذکور نپر دستورلرینه تطبیقاً

تمام مماس ق/۲ = مماس ½ (ع ـ ب) حب ½ (عَ + بَ) / حب ½ (عَ ـ بَ) .... (۲)

مماس قَ/۲ = مماس ½ (ع ـ ب) . حب ½ (ع + ب) / حب ½ (ع ـ ب) .... (۳)

دستورلریله ق و قَ مجهوللری حساب اولنور .

صورت ثالثه — عَ و بَ ضلعلریله بونلرندهکی ق زاویهسی معلوم اولان مثلث کرویٔ مائل الزوایانك ع ، ب و قَ مجهوللرینی حساب ایتمك .

نپرك دستورلرندن :

مماس (ع + ب)/۲ = تمام مماس ق/۲ . حب ½ (عَ ـ بَ) / حب ½ (عَ + بَ)

مماس (ع ـ ب)/۲ = تمام مماس ق/۲ . حب ½ (عَ ـ بَ) / حب ½ (عَ + بَ)

بالاده‌کی ایکی دستور واسطه‌سیله (ع + ب)/۲ و (ع ـ ب)/۲ مقدارلری بولنوب بعده مقدارین مذکورین بربریله برکره جمع و برکره طرح اولنەرق ع و ب زاویه‌لری بولنور .

قَ ضلعی ایسه

مماس قَ/۲ = √(حب ك . حب (ق ـ ك) / حب (ع ـ ك) حب (ب ـ ك))

دستوریله بولنوب ومجهوللر ایچون هر حالده بردرلو قیمت حصوله کلور .

صورت رابعه — برضلعه مجاور ع و ب زاویه‌لری معلوم اولان مثلث کرویٔ مائل الزوایانك مجهوللرینی حساب ایتمك

نپرك دستورلرندن .

مماس ½ (عَ + بَ) = مماس قَ/۲ . حب ½ (ع ـ ب) / حب ½ (ع + ب)

مماس ½ (عَ ـ بَ) = مماس قَ/۲ . حب ½ (ع ـ ب) / حب ½ (ع + ب)

بوقاروده‌کی ایکی دستور ایله ½ (عَ + بَ) و ½ (عَ ـ بَ) مقدارلری بولنوب صکره عَ و بَ ضلعلری بولنور .

ی زاویه‌سی

$$\text{مماس}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{ع} - \text{ب}) = \text{عام مماس}\ \frac{\text{ی}}{2}\ \frac{\text{حب}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{عَ} - \text{بَ})}{\text{حب}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{عَ} + \text{بَ})}$$

دستوریله حساب اولنه‌جغی کبی

$$\text{مماس}\ \frac{\text{ی}}{2} = \sqrt{\frac{\text{حب}\,(\text{م} - \text{عَ})\cdot\text{حب}\,(\text{م} - \text{بَ})}{\text{حب م}\cdot\text{حب}\,(\text{م} - \text{یَ})}}$$

دستوریله دخی حساب اولنه بیلور .

بومسئله دخی مجهوللرك بر درلو قیمتلری ظهور ایده جکی دستورلرك شکلندن اشکاردر .

صورت خامسه — ع و ب زاویه‌لریله مذکور زاویه‌لرك برینه مقابل ضلعی ملوم اولان مثلث کروی مائل الزوایانك بَ و یَ و ی مجهوللرینی حساب ایتمك

اول امرده بَ ضلعی

$$\frac{\text{حب ع}}{\text{حب ب}} = \frac{\text{حب عَ}}{\text{حب بَ}}$$

نسبتیله حل اولنوب بعده دیکر مجهوللر

$$\text{مماس}\ \frac{\text{یَ}}{2} = \frac{\text{مماس}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{عَ} - \text{بَ})\cdot\text{حب}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{ع} + \text{ب})}{\text{حب}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{ع} - \text{ب})}$$

$$\text{عام مماس}\ \frac{\text{ی}}{2} = \frac{\text{مماس}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{ع} - \text{ب})\cdot\text{حب}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{عَ} + \text{بَ})}{\text{حب}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{عَ} - \text{بَ})}$$

دستورلریله حل اولنورلر اضلاع ثلثه‌لری و یا زوایای ثلثه‌لری معلوم اولان مثلث کروی مائل الزوایالر ایسه (ماده ۱۰) ده ارائه اولنمش دستورلر ایله حل اولنوب ومجهوللرك قیمتلری بر درلو ظهور ایدر .

✵ مثلث كرويلرك نتيجهٔ حللرنده ظهوره كلان حالات مشكوكهنك امتحانى ✵

١٥ — مثلث كرویٔ مائل الزوايالرك بر موجب بالا حل اولنان صور ستهسندن ايكنجى وبشنجى صورتلرنده اقسام مجهولهدن بر دانه‌سى جيبلريله حل اولوب ومذكور جيبلره متعلق بر برينك متممى ايكى درلو مقدار درجه‌دن قنغيسنك مسئله‌يه توافق ايده‌جكى بلا امتحان بيلنه‌ميه‌جكندن خصوص مذكورك نوجهله تميز اولنه‌جغى بروجه آتى امتحان اولنه‌حق شو قدركه صورت خامسه مثلث كروی قطبى النه‌رق صورت ثانيه‌يه ارجاع ايديله‌بيله‌جكى كبى اصول امتحانيده ايكنجينك اصول امتحاننك عينى اوله‌جغندن يالكز ايكنجى صورتده‌كى مشكوكينك تفتيش وامتحانيله اكتفا ايديله‌جكدر .

١٦ — صورت ثانيه مناقشه‌سى — صورت ثانيه‌ده اقسام معلومه عَ و بَ و ع دن عبارت اولوب ب وق و قَ اقسام مجهوله‌سى

$$\text{حب ب} = \frac{\text{حب ع . حب بَ}}{\text{حب ع}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (١)$$

$$\text{عام مماس } \frac{\text{ق}}{٢} = \frac{\text{مماس } \tfrac{1}{2}(\text{ع} - \text{ب}) \text{ حب } \tfrac{1}{2}(\text{عَ} + \text{بَ})}{\text{حب } \tfrac{1}{2}(\text{عَ} - \text{بَ})} \quad \ldots \quad (٢)$$

$$\text{مماس } \frac{\text{قَ}}{٢} = \frac{\text{مماس } \tfrac{1}{2}(\text{عَ} - \text{بَ}) \text{ حب } \tfrac{1}{2}(\text{ع} + \text{ب})}{\text{حب } \tfrac{1}{2}(\text{ع} - \text{ب})} \quad \ldots \quad (٣)$$

دستورلريله حل اولنديغى تكراره لزوم يوقدر .

امدى مثلثك اقسام ستهسندن عَ = ب و ع = ب فرض اولنور ايسه ٢ و ٣ رقملى دستورلر

$$\text{عام مماس } \frac{\text{ق}}{٢} = - \; \text{ ومماس } \frac{\text{ق}}{٢} = \div$$

صورتلرينه كيررلر بوحالده عام مماس $\frac{\text{ق}}{٢}$ ومماس $\frac{\text{قَ}}{٢}$ مقدارلرينك قيمتلرينى بولمق ايچون استعمال اولنه‌جق اولان

تجب ع = − تجب ب . تجب و + جب ب . جب و تجب عَ

تجب عَ = تجب بَ تجب وَ + جب بَ جب وَ . تجب ع

دستورلری فرض سابقه کوره :

تجب ع = − تجب ع تجب و + جب ع جب و تجب عَ

تجب عَ = تجب عَ تجب وَ + جب عَ جب وَ تجب ع

اولەجغندن برنجی دستوردن

تجب ع (۱ + تجب و) = جب ع جب و . تجب ع

تجب ع — تجب و/۲ = جب ع . تجب عَ . جب و/۲

و تمام مماس و/۲ = مماس ع تجب ع . . . . (٤)

کذلك مماس و/۲ مماس ع تجب ع . . . . (٥)

برده اکر ع = ۹۰° و عَ = ۹۰° فرض اولـور ایسه (٤) و (٥) رقملی دستورلردن تمام مماس و/۲ = — و مماس و/۲ ÷ اولور .

وبو صورتده مسئلەنك غیرمحدود اولەجغی مساوا تك شکلندن آشکاردر .

والحاصل عَ = بَ اولدیغی حالده اقسام معلومەدن فقط بری یعنی ع یاخود عَ مقدارلری ۹۰° فرض اولنور ایسه (٤) و (٥) رقملی دستورلر .

تمام مماس و/۲ = ∼ یاخود مماس و/۲ = ∼

بناء علیه و = ۰ یاخود و = ۱۸۰° اولوب مسئلەغیر ممکن اولەجغی دستورلرك شکلندن اکلاشیلەجغی کبی بالهندسه دخی ارائه اولنەبیلور .

فرضیات اخیره دن قطع نظر ع و ع قسملرینك ۹۰° درجەدن اعظم ویا اصغر اولدیغی دوشینلور ایسه بو حالده مسئله ممکن اوله بیلمك ایچون مماس ع وتجب عَ نسبتلرینك اشارتلری بربرینك عینی اولمق لازمکلور . چونکه و مجهولنك ۱۸۰ درجەدن اصغر اولمسی لزومی آشکار اولدیغندن تمام مماس و/۲ مقدارینك اشارتی مبت اولمق ایجاب ایدر یعنی مسئلەنك ممکن اوله بیلمسی ع و عَ قسملرینك برجنسدن اولمسی شرطنه مربوط اولوب و مسئله ده مجهوللرك دائما برر درلو قیمتلری اولور .

قالدیکه عَ و بَ ضلعلری غیرمساوی اولور ایسه

جب ب = (جب ع . جب بَ) / جب بَ . . . . . (۱)

دستوری ب زاویەسنك قیمتنی اعطا ایدوب

و $\frac{\text{حب ع حب بَ}}{\text{حب عَ}}$ < ١ یاخود لع حب ع + لع حب بَ ـ لع حب عَ < ١٠

اولدقجه تناسب مثلثاتیه جدوللرندن ب زاویه‌سیچون $ب_{١}$ < ٩٠° درجه اولمق اوزره بر قیمت بولنور لکن مذکور قیمتك متممی اولان ١٨٠° ـ $ب_{١}$ یاخود $بَ_{١}$ زاویه سنده عین جیبه متناظر اولدیغندن حب ب مقدارلرینه متناظر بر برینك متممی $ب_{١}$ و $بَ_{١}$ مقدارلری بولنمش اولور که مقدارین مذکورین (٢) و (٣) رقملی دستورلرده ب محلنه قونیله‌رق ى و ىَ مجهوللریچون دخی ایکیشر قیمت بولنور و ى زاویه‌سیله ى ضلعی ١٨٠° درجه‌دن اصغر اوله‌جقلرندن عام مماس $ى_{٢}$ ومماس $ى_{٢}$ مقدارلرینك بوله‌جق قیمتلری مثبت اولمق لازمکله‌جکی و برده (٢) و (٣) رقملی دستورلره دقت اونجه (ع ـ ب) و (عَ ـ بَ) مقدارلرینك ایکیسینك بردن مثبت ویاایکیسنك بردن منفی اولمسی لزومی میدانه چیقار و بو شرط مسئله‌نك صحیح اولمسنه کافی بر شرطدر .

بو ندنبشقه عَ و بَ ضلعلری معلوم اولدیغندن (عَ ـ بَ) ذوحدینك اشارتی معلوم دیمك اولمغین اقتضا ایتدکجه $ب_{١}$ و $بَ_{١}$ قیمتلرینك مطلوبه موافق اولوب اولمدقلری بالسهوله بیلنور شویله‌که ع زاویهٔ معلومه‌سندن دستور ایله حساب اولنان $ب_{١}$ و $بَ_{١}$ زاویه‌لرینك قیمتلری طرح اولنور حاصل طرحلرك اشارتلری عَ ـ بَ حاصل طرحی اشارتنك عینی چیقار ایسه $ب_{١}$ و $ب_{١}$ قیمتلرینك ایکیسینده مسئله‌یه موافق اولوب ومسئله‌نك ایکی درلو حلی اولدیغی واکر یالکز برینك اشارتی عینی چیقار ایسه فقط مقدار مطلوبه موافق اولوب ومسئله‌نك بردرلو حلی اولدیغی والحاصل هیچ بری عینی ظهور ایتمز ایسه مسئله‌نك هیچ برحلی اولمدیغی اکلاشیلور .

یوقاروده‌کی قاعده‌نك تطبیقاتی اولمق اوزره ع زاویه‌سی حاده فرض اولنه‌رق باشلیجه اوج صورت بروجه آتی ایراد اولنمشدر ..

بَ < ٩٠° و بَ ـ ٩٠° و بَ > ٩٠°

(اولا) ع < ٩٠° و بَ < ٩٠° اولسه

عَ ضلعی بَ ضلعندن اصغر اولدقجه :

حب ب = $\frac{\text{حب ع . حب بَ}}{\text{حب عَ}}$ دستورندن $ب_{١}$ > ع بولنه جغندن بشقه $بَ_{١}$ <

٩٠° > ع . . . . اوله‌جغندن ع ـ ب۱ و ع ـ ب۱ تفاضللرينك اشارتلرى عَ ـ بَ ذوحدينى اشارتنك عينى اولوب بناء عليه مسئله‌نك ايكى درلو حلى اولور .

و عَ > بَ اولديغى تقديرده دخى

عَ + بَ < ١٨٠° و عَ + بَ = ١٨٠° و عَ + بَ > ١٨٠° اولمسى محتملدر.

امدى عَ + بَ ١٨٠° اولسه بَ < ١٨٠° ـ عَ و حب بَ < حب عَ اولوب و (١) رقملى دستور موجبنجه بَ۱ < ع اوله‌جغندن ع ـ بَ۱ تفاضلك اشارتى عَ ـ بَ تفاضلى اشارتنك عينى اولوب و ب۱ زاويه‌سى مسئله‌يه توافق ايده‌جكى حالبوكه ع ـ ب۱ تفاضلنك اشارتى عَ ـ بَ تفاضلى اشارتنك عكسى اوله‌جغندن ب۱ قيمتنك قبوله شايان اولميه‌جغى ثابت اولور .

عَ + بَ = ١٨٠° فرض اولنجه

ب۱ = ع و ع ـ ب۱ = ٠ و ع ـ ب۱ > ٠

اوله‌جغندن مسئله غير ممكن اولور و عَ + بَ ١٨٠° اولور ايسه مسئله ينه غير ممكن اولور .

چونكه بَ < ١٨٠° ـ عَ وحب بَ > حب عَ اوله‌جغندن حب ب۱ < حب ع ب۱ > ع و ع ـ ب۱ < ٠ و عَ ـ بَ۱ > ٠ اولوب مسئله‌نك غير ممكن اوله‌جغى اكلاشيلور .

(ثانياً) ع < ٩٠° و بَ = ٩٠° اولديغى حالده

$$\text{حب ب} = \frac{\text{حب ع . حب بَ}}{\text{حب عَ}} \quad . \; . \; . \quad \text{(١) دستورى}$$

$$\text{حب ب} = \frac{\text{حب ع}}{\text{حب عَ}} \quad \text{اولور .}$$

امدى عَ ب فرض اولدقده (١) رقملى دستوردن ب۱ > ع اولمق لازم كلكين

ع ـ ب۱ < ٠ و ع ـ ب۱ < ٠ اولوب مسئله‌نك ايكى درلو حلى اولور.

ياخود عَ < بَ يعنى عَ ـ بَ < ٠ اولديغى حالده دخى ينه سابق مثللو ع ـ ب۱ > ٠ و ع ـ بَ۱ > ٠ اوله‌جغندن مسئله‌نك ينه هيچ حلى اوله‌مز .

(ثالثاً) ع < ٩٠° و بَ < ٩٠° اولديغى حالده اكر عَ < بَ اولور ايسه

عَ + بَ > ١٨٠° و عَ + بَ = ١٨٠° و عَ + بَ < ١٨٠° اوله بيلور
عَ + بَ > ١٨٠° اولنجه بَ > ١٨٠° - عَ و بَ منفرجه اولديغندن
حب بَ > حب عَ اولمق ايجاب ايده جكندن
حب ب١ > حب ع و ب١ > ع و ع - ب١ > ٠ و ع - بَ١ > ٠ اولوب بناءعليه
مسئله‌نك ايكى درلو حلى اولور .
عَ + بَ = ١٨٠° فرض اولنجه دخى ع - ب = ٠ و ع - بَ١ = ٠ اولوب
بولنان ايكى مقداردن يالكز ب١ مسئله‌يه توافق ايدوب ديكرى ترك اولنور .
عَ + بَ < ١٨٠° اولديغنه كوره

بَ < ١٨٠ − عَ و حب بَ < حب عَ و حب ب١ < حب ع

اوله جغندن بناء عليه

ب١ < ع و ع - ب١ < ٠ اولوب

مسئله‌نك زاويه‌سنك دستوردن تحصيل اولنان ب١ قيمتيله معين بردرلو
حلى اولور .
اكر عَ > بَ فرض اولنورايسه عَ و بَ دن هر برى ٩٠° دن اعظم اولديغندن

حب عَ < حب بَ و حب ع < حب ب و ع < ب١ اوله جغندن

ع - ب١ < ٠ و ع - بَ١ < ٠ اولوب

مسئله غير ممكن اولور .
والحاصل ع = ٩٠° و ع > ٩٠° اولديغنه كوره مسئله نك نتيجهٔ مناقشه سى
اولوبده علاوه اولنجه نتايج مستحصله آتيده‌كى جدولده كوستردليكى اوزره
ظهور ايدر :

ع > ٩٠°	بَ < ٩٠°	عَ < بَ	ايكى درلو حل
		عَ = بَ	بردرلو ″
		عَ > بَ و عَ + بَ < ١٨٠°	″ ″
		عَ > بَ و عَ + بَ = ١٨٠° و عَ + بَ > ١٨٠°	غير ممكن
	بَ = ٩٠°	عَ < بَ	ايكى درلو حل
		عَ = بَ ياخود عَ > بَ	غير ممكن
	بَ > ٩٠°	عَ < بَ و عَ + بَ < ١٨٠°	ايكى درلو حل
		عَ < بَ و عَ + بَ = ١٨٠° ياخود عَ + بَ > ١٨٠°	بردرلو ″
		عَ = بَ و عَ > بَ	غير ممكن

عَ = ٩٠°	بَ < ٩٠	عَ < بَ یاخود عَ = بَ	
		عَ > بَ و عَ + بَ < ١٨٠°	بردرلو حل
		عَ > بَ وعَ + بَ = ١٨٠° یاخود عَ + بَ > ١٨٠°	غیر ممکن
	بَ = ٩٠°	عَ < بَ یاخود عَ > بَ	غیر ممکن
		عَ = بَ	غیر محدود
	بَ > ٩٠°	عَ > بَ و عَ + بَ < ١٨٠°	بردرلو حل
		عَ > بَ وعَ + بَ = ١٨٠° یاخود عَ + بَ > ١٨٠°	غیر ممکن
		عَ = بَ یاخود عَ < بَ	〃
ع > ٩٠	بَ < ٩٠	عَ < بَ یاخود عَ = بَ	غیر ممکن
		عَ > بَ و عَ + بَ < ١٨٠°	ایکی درلو
		عَ > بَ و عَ + بَ = ١٨٠° یاخود عَ + بَ > ١٨٠°	غیر ممکن
	بَ = ٩٠	عَ > بَ یاخود عَ = بَ	کذا
		عَ < بَ	ایکی درلو
		عَ < بَ و عَ + بَ > ١٨٠°	بردرلو
		عَ < بَ و عَ + بَ = ١٨٠° یاخود عَ + بَ < ١٨٠°	غیر ممکن
		عَ = بَ و عَ + بَ > ١٨٠°	بردرلو
		عَ = و عَ + بَ = ١٨٠° یاخود عَ + بَ < ١٨٠°	غیر ممکن
		عَ > بَ	ایکی درلو

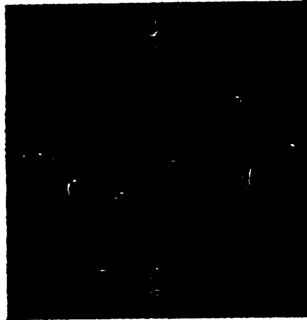
مثلثات کرویه‌نك بعض تطبیقاتی

١٧ — کرهٔ ارض اوزرنده طوللریله عرضلری معلوم اولان ایکی نقطه‌نك بربرندن بعدینی حساب ایتمك :

طول وعرضلری معلوم اولان ایکی نقطه (شکل ٦) ع و ف حرفلریله قطب شمالئ کره ط حرفیله خط استوا قَ ب ف دائره‌سیله ارائه و مذکور کره زاورنده طول غربیلر ب نقطه سندن اعتباراً ب م قَ جهتنه وطول

شرقیلر ب ك ف جهتنه طوغری قطع وحساب اولندیغی فرض اولنسه ع م و ب م قوسلری ع نقطه سنك عرض وطولنی کوسترهکله مقدار درجهلری معلوم کذلك ق ك و ب ك قوسلریدخی ق نقطه سنك عرضیله طولندن عبارت اولدقلرندن معلومدرلر .

شکل ٦



ومعلوم اولان نقطهلرك ع م و ق ك عرض شمالیلرینك تماملری اولان قوسلر ط ع ق مثلثنك ط ع و ط ق ضلعلرینی تشکیل ایدوب وضلعین مذکورین بیننده کی ع ط ق زاویه سی دخی م و ب ك طوللری مجموعنه مساوی م ب ك قوسیله مساحه اولنمغله ط ع ق مثلث کروینك ایکی ضلعیله اره لرنده کی زاویه سی معلوم دیمك اولمغین ع و ق نقطهلری بیننده کی بعدن عبارت اولوب ع ق دائرهٔ عظیمه قوسی حساب اولندرق مسافهٔ مطلوبه بولنور .

(مثال)

ع نقطه سی { عرض شمالی . . . ع م ٧٥° ١٨′ ٢٠″
طول غربی . . . ب م = ١٢° ٢١′ ٤٠″

ق نقطه سی { عرض شمالی . . . ق ك ٢١° ١٤′ ١٥″
طول شرقی . . . ب ك = ١٠° ٤٨′ ١٠″ فرض اولنسه

ط ع = ٩٠ − ع م = ٣٢° ٤١′ ٢٠″
ط ق = ٩٠ − ق ك = ٤٨° ٤٥′ ٤٥″
ع ط ق = ب م + ب ك = ٢٢° ١٩′ ٥٠″ اولور .
ق ع یاخود ص قوس مجهولی بروجه آتی بولنور :

عام‌حب َص = عام‌حب َع عام‌حب َق + حب َع . حب َق . محب‌ص = محب َع (محب َق + مماس َع حب َق محب‌ص) . اولوب مماس َع . محب ص = عام‌مماس هـ = محب هـ / حب هـ فرض اولنوبده مساویسی دستور سابقده محلنه وضع اولندقده

محب َص = محب َع (حب هـ . محب َق + محب هـ . حب َق) / حب هـ = محب َع (حب َق + حب هـ) / حب هـ

... (١) اولور .

❋ هـ زاویهٔ متوسطه‌سنك حسابی ❋

لع عام مماس هـ = لع مماس َع + لع محب ص — ١٠

لع مماس َع = ١٠,٤١٠٤٦٦٤ هـ = ٩ , ٢٢ , ٥٦ , ٢٢ اولور .

لع محب ص = ٩,٩٦٢٩٥٤٠

لع‌عام‌مماس هـ = ١٠,٣٧٣٤٢٠٤

ع ق یاخود َص قوسنك عدد درجاتنك حسابی

َق + هـ = ٩ , ٥١ , ٣٧ , ٥٥

لع‌محب َص = لع حب (َق + هـ) + لع‌محب َع + عام عددی لع حب هـ — ١٠

لع حب (َق + هـ) = ... ٩,٩١٦٦٧٦٤

لع‌محب َع = ... ٩,٥٥٩٠٤٤١

عام عددیٔ لع هـ ٠٤٠٩٢٠٠٥

لع محب َص = ... ٩,٨٨٤٩٢١٠

َص = ٤١,٧ , ٥٢ , ٩٥ اولور .

ع ق قوسنك متره اوله‌رق طولی

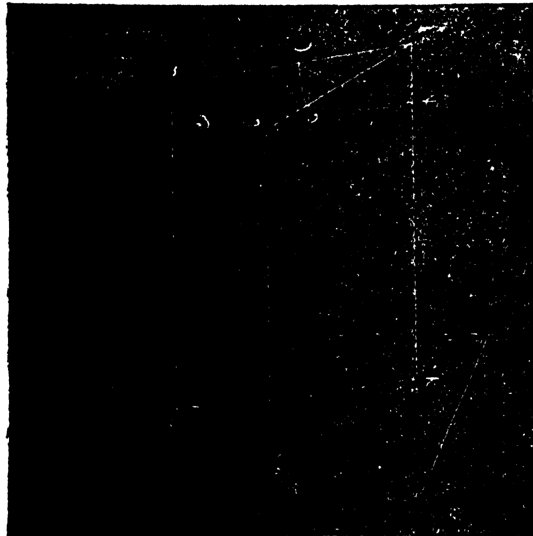
کرهٔ ارض نصف النهار دائره‌سنك ربع محیطی طولی ١٠,٠٠٠٠٠ متره اولدیغندن هـ ع قوسنك متره اوله‌رق قیمتی س حرفیله کوستریلنجه

س = ١٠٠٠٠٠٠٠ × ٣٩ , ٥٣ , ٤١,٧ / ٩٠ اولمق لازم کلمکین

س = ٤٤٣,٢٧٦٨ میریامتره اولور

۱۸ —. برزاویه‌یی افقه تحویل ایتمك - مثلا (شکل ۷) افقه غیر موازی د ح ف سطحی اوزرنده واقع وضلعلری ح ف و ح د خطلریله کوستریلان

شکل ۷



زاویه‌نك افقه تحویلی مراد اولنسه زاویهٔ مذکوره‌نك ضلعلری اوزرنده کیف ما اتفق آلنمش د و ف نقطه‌لرندن م ن مستویٔ افقیسی اوزرینه د َد و ف َف عمودلری تنزیل وموقع عمود نقطه‌لریله ح رأس زاویه‌دن ینه مستویٔ مذکور اوزرینه تنزیل اولنمش ح َح عمودینك َح موقع عمود نقطه‌سی بینلری َح َد و َح َف خطلریله وصل اولندقده د ح ف زاویه‌سنك م ن مستویٔ افقیسی اوزرنده‌کی مرتسمندن عبارت َد َح َف زاویه‌سنه زاویهٔ معلومه‌نك افقه تحویلی تعبیر اولنور مسئله‌ده مساحه اولنه‌بیلان د ح ف و د ح َح و ف ح َح زاویه‌لری اعانه‌سیله د ح ف زاویه‌سنی حساب ایتمکدن عبارتدر .
امدی ح نقطه‌سی مرکزی اوله‌رق کیف ما اتفق برنصف قطر ایله رسم اولنمش برکره دوشینلور ایسه د ح ف و د ح َح و ف ح َح سطحلرینك مذکور کره ایله فصل مشترکلرینك تشکیل ایلدکلری ب ه ع مثلث کرویسنك ضلعلری واسطه‌لریله مسئله حل اوله‌جق اولان زوایای ثلثه‌نك مقدارلرینی کوستره‌جکلری کبی مثلث مذکورك ع ع زاویه‌سیده مطلوب اولان تحویلدن عبارت اولور .

و ع زاویه‌سی ایسه شو :

$$\text{ظل}\ \frac{ع}{٢} = \sqrt{\frac{\text{جب}\ م\ .\ \text{جب}\ (م - عَ)}{\text{جب}\ بَ\ .\ \text{جب}\ هَ}}$$ دستوریله بروجه آتی بولنور

دستور مذکوردن

$$\text{لع ظل}\ \frac{ع}{٢} = \frac{١}{٢} \Big[\text{لع جب}\ م + \text{لع جب}\ (م - عَ) + \text{تمام عددی لع جب}\ بَ + \text{تمام عددی لع}\ هَ \Big]$$ اولور .

{مثال}

د ح ف = ٠ ٤ ٩ ١ ٣٥ = عَ و ف ح = ٢٥ ٤٢ ٦٧ = بَ
و د ح ح = ٥ ٢ ٤ ٥٣ = هَ اولسه عَ + بَ + هَ = ٢ م =
٤٠ ٦ ٢ ١٥٨ اولمغین
م = ٢٠ ١٣ ٧٩ و (م - عَ) = ٤٠ ٣ ٤١ اولور .

ع زاویه‌سنك حسابی

لع جب ٢٠ ١٣ ٧٩	=	٩,٩٩٢٢٧٠٦
لع جب ٤٠ ٣ ٤١	=	٩,٨٢٤٦٢٠٦
تمام عددی لع جب ٢٥ ٤٢ ٦٧	= . . .	٠,٠٣٤٦٧٧٥
تمام عددی لع جب ٤٣ ٤ ٣ ٥٣	=	٠,٠٩٣٦٤٩٤
		١٩,٩٤٥٢١٨١
لع ظل $\frac{ع}{٢}$	=	٩,٩٧٢٦٠٩

$\frac{ع}{٢}$ = ٢٠ ٨ ١٠ ٥

ع = ٢٠ ١٦ ٢٠ ٤٠ اولور .

١٩ — زاویه وجهیه‌لری معلوم اولان ذو ثلثة وجوه برزاویۀ مجسمه‌نك ضلع مجسملرندن هر برینك دیکر ایکیسنك سطحنه میلنی تعیین ایتمك :

ذو ثلثة وجوه زاویۀ مجسمۀ معلومه‌نك ضلع مجسملری ح د و ح ف و ح ب وزاویۀ مجسمه‌نك ح رأسی مرکز اوله‌رق رسم اولنان کره‌نك ضلع مجسملری

قطع ایلدیکی نقطه‌لر ع و ب و ه حرفلریله اشعار اولندقده ح د و ح و ح ف خطلرینك یاخود ح ع و ح ب و ح ه نصف قطرلرك تشکیل ایده‌جکلری زاویهٔ مسطحه‌لر ع ب ه مثلث کروینك ع ب و ه ضلعلریله وزن یهٔ مجسمه‌نك مستوین زاویه‌لری دخی مذکور مثلثك ع و ب و ه زاویه‌لریله ... اولنه‌جغی معلومدر .

امدی ع ح ضلع مجسمك دیکر ایکی ضلع مجسملرك سطحنه یعنی ب سطحنه میلی ج نقطه‌سندن مرور وسطحی ب ه قوسنه عمود اولان ع ج قوسیله مساوی اولوب حالبوکه ع ع ب مثلث کروی قائم الزاویه‌در (ماده ٤ ده) جده

حب ع ع حب ع ب · حب ب

یاخود ع ع ع فرض اولندرق

حب ع حب · حب ب ٢حب ه · حب ½ ب · حب ½ ب اولدیغندن

حب ½ ب = √(حب (م − ع) حب (م ه) / حب ع · حب ه)

حب ½ ب √(حب م · حب (م ب) / حب ع · حب ه) اولدیغندن

حب ع حب ع ؛ حب م حب (م ع) حب (م − ب) · حب (م ه)

.. (١) و ح ب و ح ه ضلع مجسملرینك ح ع ه و ح ع ب سطحلرینه اولان میللریده ب و ه حرفلریله کوستریله رك

حب ب حب ب ٧ حب م · حب (م ب) · حب (م − ع) · حب (م ه)

... (٢) کذا

حب ه = √(حب م · حب (م − ب) · حب (م − ه) · حب (م ع)) / حب ه

...(٣) اولور .

دستورات ثلثهٔ سابقه مسئله‌نك حلنه کافی اوج دستور اولوب ومذکور دستورلردن حب ع · حب ع = حب ب · حب ب ه · حب ه اولدیغی استخراج اولنوب یعنی هر مثلث کرویده ضلعلر جیبلرینك اوضاعی متناظر ارتفاعلر جیبلریله مستطیللری بربرینه مساوی اولدیغی آکلاشیلور .

٢٠ — ذواربعة وجوه برجسمك بربرینه متصل اوج ضلع مجسملریله

مذكور ضلع مجسملرك بر بريله احداث ايلدكلرى زاويهٔ مسطحه‌لر معلوم ايكن مذكور ذواربعة وجوه جسمك حجمنى حساب ايتمك

ذواربعة وجوهك ح ع و ح بَ و ح ه ضلع مجسملرينك قيمتلرى ص و ط و ف ومعلوم اولان ب ح ى و ع ح ى و ع ح ب زاويهٔ معلومه‌لرى عَ و بَ و ى ومذكور زاويه‌لرك عَ ؛ بَ + ىَ مجموعى ٢ م

ح ع ضلع مجسمك ب ح ى سطحيله ميلى عً

و ع رأس نقطه‌سندن ب ح ى سطحنه تنزيل اولنمش عمود ح

وحجم مطلوب س حرفلريله كوسترلمش اولسه

ح ب ى مثلثى قاعده ومذكور وجهنه مقابل ع زاويه‌سى رأس اتخاذ اولندقده

س = ⅓ ح × ب ح ى

ياخود ح ب ه مثلثنك مساحهٔ سطحيه‌سى ½ ص ط لا حب عَ اولديغندن

س = ⅙ ص ط . حب عَ . ح اولور .

انجق

ح = ص . حب عً

و (ماده ١٩)

حب عً = $\frac{٢}{\text{حب عَ}}$ √حب م حب (م — عَ) حب (م — بَ) . حب (م — ىَ)

اولديغندن

س = ⅓ ص ف ط √حب م . حب (م — ع) . حب (م — بَ) . حب (م — ىَ) . . . (١)

اولور .

اكر ح ع و ح ب و ح ى ضلع مجسملرى اوزرينه انشا اولنمش برمنشور متوازى الاضلاعينك حجمى سَ ايله اشعار اولنور ايسه سَ = ٦ × س اوله‌جغى جهتله سَ = ٢ ص ط ف √حب م . حب (م — عَ) . حب (م — بَ) . حب (م — ىَ) (٢) اولور .

عَ و بَ و ىَ زاويه‌لرى قائمه اولنجه

حب م = حب ١٣٥° = ½ √٢

وحب (م — عَ) = حب (م — بَ) = حب (م — ىَ) = حب ٤٥° = ½ √٢ اولوب يعنى (٢) رقملى دستور سَ = ص . ط . ف صورتنه كيروب فقط منشور متوازى المستطلات هيئتنه رجوع ايتمش اولان جسمك حجمنى ارائه ايدر .

٢١ – اضلاع ثلثه‌سی معلوم برمثلث کروینك مساحهٔ سطحیه سنی حساب ایتمك

معلوم اولدیغی اوزره برمثلث کروینك مساحهٔ سطحیه سی ع و ب و ن ایله کوستریلان زوایای ثلثه‌سی مجموعك ایکی قائمه دن زیاده‌لیکاه مساحه اولندیغندن مساحهٔ سطحیهٔ مذکوره ۲ ی = ع + ب + ن – ۱۸۰ مساواتیله مساحه اولنه‌جق دیمك اولوب ومساوات مذکوره دن

$$\frac{\text{ع}+\text{ب}}{2} = 90 - \left(\frac{\text{ن}}{2} - \text{ی}\right) \quad \text{اولور.}$$

امدی یوقاروده‌کی قیمت (ماده ۱۲) دیلامبرك شو :

$$\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}+\text{ب}}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ن}}{2}} = \frac{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}'-\text{ب}'}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ن}'}{2}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}+\text{ب}}{2}}{\text{جب}\,\frac{\text{ن}}{2}} = \frac{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}'+\text{ب}'}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ن}'}{2}}$$

دستورلرنده محللرینه وضع اولندقده

$$\frac{\text{تجب}\left(\frac{\text{ن}}{2}-\text{ی}\right)}{\text{تجب}\,\frac{\text{ن}}{2}} = \frac{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}'-\text{ب}'}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ن}'}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{و}\quad \frac{\text{جب}\left(\frac{\text{ن}}{2}-\text{ی}\right)}{\text{جب}\,\frac{\text{ن}}{2}} = \frac{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}'+\text{ب}'}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ن}'}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots$$

اولمغین برنجی معادله دن :

$$\frac{\text{تجب}\left(\frac{\text{ن}}{2}-\text{ی}\right) - \text{تجب}\,\frac{\text{ن}}{2}}{\text{تجب}\left(\frac{\text{ن}}{2}-\text{ی}\right) + \text{تجب}\,\frac{\text{ن}}{2}} = \frac{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}'-\text{ب}'}{2} - \text{تجب}\,\frac{\text{ن}'}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}'-\text{ب}'}{2} + \text{تجب}\,\frac{\text{ن}'}{2}}$$

یاخود

$$\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ن}-\text{ی}}{2}\ \text{جب}\,\frac{\text{ی}}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ن}-\text{ی}}{2}\ .\ \text{تجب}\,\frac{\text{ی}}{2}} = \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}'+\text{ن}'-\text{ب}'}{4}\ \text{جب}\,\frac{\text{ب}'+\text{ن}'-\text{ع}'}{2}}{\text{تجب}\,\frac{\text{ع}'+\text{ن}'-\text{ب}'}{4}\ .\ \text{تجب}\,\frac{\text{ب}'+\text{ن}'-\text{ع}'}{2}}$$

یاخود

$$\text{مماس}\,\frac{\text{ن}-\text{ی}}{2}\ .\ \text{مماس}\,\frac{\text{ی}}{2} = \text{مماس}\,\frac{\text{م}-\text{ب}'}{2}\ \text{مماس}\,\frac{\text{م}-\text{ع}'}{2} \quad \ldots \quad (3)$$